

Evolutas, Involutas e *Roulettes*

Maria Teresa Carrapa Ribeiro de Carvalho

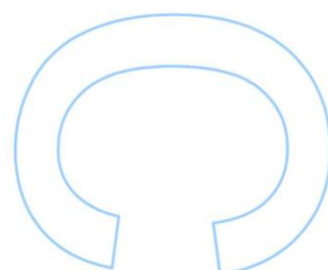
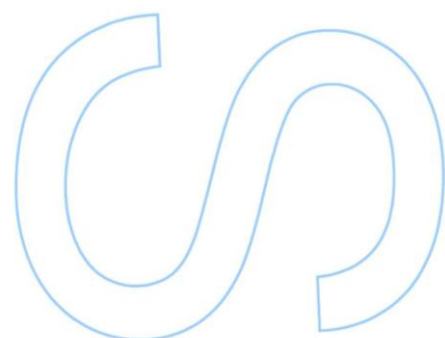
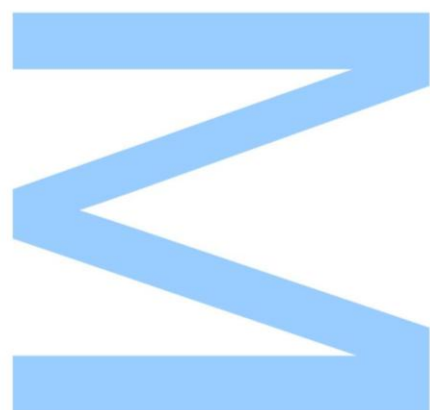
Mestrado em Matemática para Professores

Departamento de Matemática

2013

Orientador

Helena Mena Matos, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências

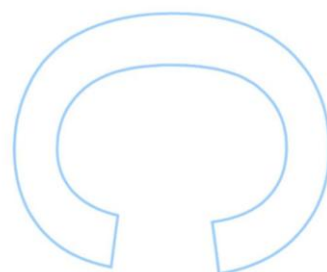
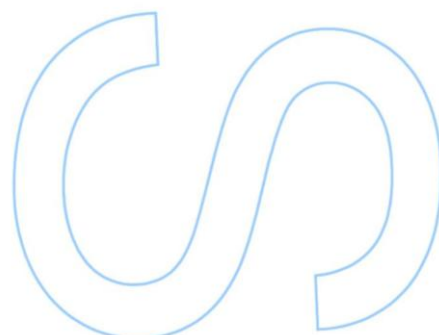
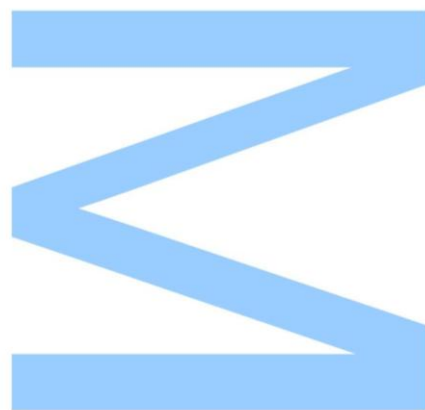




Todas as correções determinadas
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____/____/____



Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Helena Mena Matos, agradeço a ajuda constante que me deu, com o seu conhecimento e permanente disponibilidade.

Agradeço também a todos os professores e colegas deste mestrado porque de alguma forma contribuíram para este trabalho.

Resumo

O objetivo desta dissertação foi fazer um estudo de um modo acessível à geometria das curvas planas diferenciáveis, falando de noções e resultados básicos que juntamente com uma preparação mínima em matemática, permitissem chegar a resultados atrativos e interessantes. A restrição ao conjunto das curvas planas permitiu trabalhar num ambiente familiar, o plano euclidiano, e ainda usar o computador tanto para obter representações gráficas das curvas como para explorar as suas propriedades através de animações.

Neste trabalho são apresentados os conceitos, e algumas propriedades, de curvatura, circunferência osculadora, evoluta, involuta e *roulette*. Como exemplo de *roulettes* são estudadas com mais detalhe as trocoides. São incluídas duas aplicações, o pêndulo isócrono, concebido e utilizado por Huygens em 1659 na construção de um relógio de pêndulo e o perfil cicloidal utilizado para garantir a transmissão de movimento uniforme entre as rodas dentadas de uma engrenagem.

Palavras-chave: Curvatura, evoluta, involuta, *roulette*, pêndulo isócrono, perfil cicloidal

Abstract

The aim of this thesis was to study the geometry of differentiable plane curves, covering basic material presented in a manner suitable for achieving attractive and interesting results with minimal mathematical preparation. The restriction to plane curves allowed us to work in a familiar environment, the Euclidean plane, and to use the computer for both plotting curves and exploiting their properties through animations.

In this work we consider some properties of curvature, osculating circle, evolute, involute and *roulette* curves. As an example of *roulettes*, the trochoids are studied in more detail. Two applications are included, the isochronous pendulum, conceived by Huygens in 1659 and applied by himself to build an isochronous pendulum clock and the cycloidal tooth profile used for constant velocity transfer between two gears.

Keywords: Curvature, evolute, involute, *roulette*, isochronous pendulum, cycloidal tooth profile

Índice

Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Generalidades sobre curvas	3
1.1 Curva parametrizada	3
1.2 Comprimento de arco	4
1.3 Curvatura e circunferência osculadora	5
1.3.1 Curvatura	6
1.3.2 Circunferência osculadora	12
2 Evolutas e Involutas	19
2.1 Evoluta	19
2.2 Curvas Paralelas	22
2.3 Involutas	25
3 <i>Roulettes</i>	30
3.1 Discussão geral	30
3.2 Cicloides	32
3.3 Trocoides	34
3.3.1 Epitrocoides	34
3.3.2 Hipotrocoides	35
3.3.3 Período fundamental	37
3.3.4 Dupla geração das trocoides	38
4 Aplicações	44
4.1 Relógio de pêndulo de Huygens	45
4.1.1 O problema da tautócrona	47
4.1.2 Determinação da evoluta	53
4.2 Perfil dos dentes de rodas dentadas	54
4.2.1 Lei do Engrenamento	54
4.2.2 Perfil cicloidal	57

5	Animações com o Geogebra	60
5.1	Curvatura e circunferência osculadora	60
5.2	Elipse: evoluta e paralelas	61
5.3	Involutas de uma circunferência	62
5.4	Cicloides	63
5.5	Trocoides	63
5.6	Dupla geração da epitrocoide	64
5.7	Dupla geração da hipotrocoide	64
5.8	Pêndulo isócrono	65
5.9	Propriedade tautócrona da cicloide	66
5.10	Par conjugado: epicicloide e hipocicloide	67
5.11	Perfil cicloidal: engrenamento	67
	Referências Bibliográficas	69

Lista de Figuras

1.1	Ângulo do vetor tangente	7
1.2	Sinal da curvatura	7
1.3	Circunferência osculadora como limite das circunferências que passam por $P_0 = \alpha(t_0)$, $P_1 = \alpha(t_0 - h)$ e $P_2 = \alpha(t_0 + h)$, quando $h \rightarrow 0$	13
1.4	Centros de curvatura	13
1.5	Família de circunferências osculadoras nos pontos do arco da elipse $\alpha(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$	18
2.1	Evolutas	21
2.2	Evoluta como envolvente das normais de uma curva	22
2.3	Curvas paralelas à elipse	22
2.4	Pontos não regulares das curvas paralelas à elipse	25
2.5	Construção da involuta	27
2.6	Involutas da circunferência	29
3.1	Construção da <i>roulette</i>	31
3.2	Cicloides	33
3.3	Cicloide invertida	34
3.4	Construção da epitrocoide	35
3.5	Posição inicial do ponto P , gerador da hipotrocoide	36
3.6	Trocoides congruentes	40
3.7	Dupla geração dos trocoides	43
4.1	Manuscrito com as retrições do pêndulo de 1657	46
4.2	Pêndulo isócrono	47
4.3	A curva que liga O a P é parte de uma cicloide invertida	50
4.4	Componente tangencial do peso no ponto P	52
4.5	A força tangencial é diretamente proporcional ao comprimento do arco	53
4.6	Cicloide invertida e a sua evoluta	54
4.7	Circunferências primitivas de duas rodas dentadas sendo C o ponto de contacto entre um par de dentes em ação.	55
4.8	Lei do Engrenamento	56
4.9	Construção do perfil cicloidal	58
4.10	Ponto de contacto da hipocicloide com a epicloide	59

4.11	Epicicloide como a envolvente das posições sucessivas da hipocicloide	59
5.1	Instantâneos de <i>Curvatura e circunferência osculadora</i>	61
5.2	Instantâneos de <i>Elipse: evoluta e paralelas</i>	61
5.3	Instantâneos de <i>Involutas de uma circunferência</i>	62
5.4	Instantâneos de <i>Cicloides</i>	63
5.5	Instantâneos de <i>Trocoides</i>	63
5.6	Instantâneos de <i>Dupla geração da epitrocoide</i>	64
5.7	Instantâneos de <i>Dupla geração da hipotrocoide</i>	65
5.8	Instantâneos de <i>Pêndulo isócrono</i>	65
5.9	Instantâneos de <i>Propriedade tautócrona da cicloide</i>	66
5.10	Instantâneos de <i>Par conjugado: epicicloide e hipocicloide</i>	67
5.11	Instantâneos de <i>Perfil cicloidal: engrenamento</i>	68

Introdução

O objetivo desta dissertação foi fazer um estudo de um modo acessível à geometria de curvas planas diferenciáveis, falando de noções e resultados básicos que juntamente com uma preparação mínima em matemática, permitissem chegar a resultados atraentes e interessantes. A restrição ao conjunto das curvas planas permitiu trabalhar num ambiente familiar, o plano euclidiano, e ainda usar o computador tanto para obter representações gráficas como para explorar propriedades das curvas através de animações.

No primeiro capítulo são introduzidos os conceitos de curva parametrizada, comprimento de arco, curvatura e circunferência osculadora. É demonstrado que a função curvatura determina completamente a curva a menos de um movimento rígido e ainda que a circunferência osculadora num ponto é a circunferência com maior ordem de contacto nesse ponto. No segundo capítulo são definidas evolutas, paralelas e involutas de uma curva. A evoluta é o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva. Ao desenrolar um fio que contorna a curva, conservando-o esticado, a extremidade descreve uma involuta dessa curva. No terceiro capítulo é apresentado um tipo especial de curvas, as *roulettes*. Uma *roulette* é a curva gerada por um ponto rigidamente ligado a uma curva móvel quando esta rola sem deslizar sobre uma curva fixa. De modo a facilitar a obtenção das parametrizações destas curvas considera-se o plano de Argand. Como exemplos de *roulettes* são estudadas as cicloides e as trocoides. Em ambos os casos a curva móvel é uma circunferência e a fixa é uma reta no primeiro e uma circunferência no segundo. As trocoides podem ter formas muito diversas e visualmente atrativas. Em 1965 foi inventado por Danys Fisher o espirógrafo, um brinquedo para as desenhar. No quarto capítulo é feita referência ao enquadramento histórico do problema da tautócrona resolvido por Huygens. É estudada a curva tautócrona e a sua aplicação na construção de um pêndulo isócrono com recurso ao conceito de evoluta. Como um segundo problema considera-se a determinação do perfil dos dentes das rodas dentadas de uma engrenagem com a qual se pretende uma transmissão de movimento uniforme. As curvas utilizadas tradicionalmente para os perfis são as hipocicloides e epicloides e a involuta da circunferência. É apresentada a construção do perfil cicloidal, hoje em dia muito menos utilizado do que o perfil de involuta, mas que continua a ser utilizado essencialmente nas engrenagens dos relógios. Finalmente no capítulo cinco são apresentadas as animações desenvolvidas em GeoGebra para visualizar conceitos e propriedades das curvas. As definições e os resultados apresentados nos capítulos de

um a três são maioritariamente adaptações feitas a partir dos textos de Rutter [8] e Gibson [3].

Faz parte integrante desta tese um CD com um conjunto de páginas em HTML5, guardadas numa pasta designada WEBSITE, que contém as animações apresentadas no capítulo cinco.

1

Generalidades sobre curvas

1.1 Curva parametrizada

No espaço \mathbb{R}^2 designaremos um vetor por \vec{u} e um ponto por uma consoante maiúscula P . Consideramos este espaço munido do produto interno canónico definido por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$, onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$. A norma de um vetor é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

A ideia intuitiva de curva plana é a de uma linha contínua contida num plano. Facilmente se aceitam como exemplos de curvas uma reta, uma circunferência ou uma parábola, usualmente descritas por equações cartesianas. As curvas planas podem ser descritas matematicamente por uma equação cartesiana em x e y , explicitamente por $y = f(x)$ correspondendo ao gráfico de uma função ou de forma implícita por $f(x, y) = 0$ correspondendo neste caso ao conjunto de pontos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.

Outro modo de pensar numa curva consiste em olhar a curva como o caminho traçado por um ponto a mover-se em \mathbb{R}^2 . Se $\alpha(t)$ representar o vetor posição desse ponto no instante t , a curva será descrita por uma aplicação de parâmetro t com valores no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Esta ideia dá origem à definição de curva parametrizada.

Definição 1 *Uma curva parametrizada é uma aplicação contínua $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo de \mathbb{R} . A $\alpha(I)$ chamamos traço da curva. Escrevendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ as funções x e y são as funções componentes de α .*

Dizemos que α é uma curva parametrizada suave se cada uma das suas funções componentes possuir derivada de todas as ordens.

Se nada for dito em contrário, sempre que usarmos a palavra curva estaremos a referir-nos a curvas parametrizadas suaves.

1.2 Comprimento de arco

Chamamos vetor velocidade da curva α a $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ que quando não nulo define a direção da tangente à curva no instante t . De facto, notemos que o vetor

$$\frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

é paralelo à corda que liga os pontos $\alpha(t + \Delta t)$ e $\alpha(t)$ do traço de α e à medida que Δt tende para zero, a corda torna-se paralela à tangente em $\alpha(t)$. Logo, a tangente deverá ser paralela a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \alpha'(t).$$

Se o vetor velocidade de α nunca se anula, a curva diz-se regular e tem uma direção tangente bem definida em cada instante. Se a curva não é regular, os pontos onde $\alpha'(t) = \vec{0}$ chamam-se pontos singulares de α . Para definir o comprimento de uma curva vamos considerar curvas regulares.

Suponhamos que a curva α está definida num intervalo $[a, b]$. Se considerarmos uma partição arbitrária de $[a, b]$, em subintervalos de igual amplitude,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = b$$

definimos uma linha poligonal P_0, P_1, \dots, P_n onde $P_k = \alpha(t_k) = (x_k, y_k)$. O comprimento da curva é aproximado pelo comprimento da linha poligonal que substitui o traço da curva em $[t_{k-1}, t_k]$ pelo segmento que une $\alpha(t_{k-1}) = P_{k-1}$ a $\alpha(t_k) = P_k$. O comprimento da linha poligonal é dado por

$$\sum_{k=1}^n \|P_k - P_{k-1}\| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

Fazendo $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ pode-se reescrever o último somatório como

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

e fazendo Δt tender para zero obtém-se para o comprimento da curva entre a e b

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 2 Dizemos que o comprimento de arco de uma curva α a partir do ponto $\alpha(t_0)$ é a função

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(u) du$$

onde

$$v(t) = \|\alpha'(t)\|$$

é a velocidade escalar da curva α no instante t .

Assim tem-se que $s(t_0) = 0$ e $s(t) > 0$ ou $s(t) < 0$ consoante $t > t_0$ ou $t < t_0$.

Note-se que se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para qualquer t , então $s(t) = t - t_0$, isto é t mede o comprimento de arco a menos de uma constante.

Dizemos que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco quando é percorrida com velocidade escalar constante igual a 1.

Se α é uma curva definida no intervalo $[a, b]$, regular e não parametrizada pelo comprimento de arco, pode ser reparametrizada de modo a que tenha velocidade escalar constante igual a 1. Com efeito uma vez que $s'(t) = v(t) > 0$, a função s é crescente e portanto injetiva. Assim s é uma bijeção de $[a, b]$ em $[0, l(\alpha)]$. Chamando h à inversa de s tem-se que $\alpha \circ h$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco pois

$$(\alpha \circ h)'(s) = h'(s)\alpha'(h(s)) = \frac{1}{v(h(s))}\alpha'(h(s)).$$

Daqui resulta que

$$\|(\alpha \circ h)'(s)\| = \frac{1}{v(h(s))} \|\alpha'(h(s))\| = 1$$

para qualquer $s \in [0, l(\alpha)]$.

Teorema 1 *Em qualquer curva α regular e parametrizada pelo comprimento de arco ou $\alpha''(t) = \vec{0}$ ou $\alpha''(t)$ é perpendicular a $\alpha'(t)$, para qualquer t .*

Demonstração.

Como

$$1 = \|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$$

resulta derivando relativamente a t

$$2\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = 0.$$

Como α é regular, $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t$ e portanto ou $\alpha''(t) = \vec{0}$ ou $\alpha''(t)$ é perpendicular a $\alpha'(t)$, para qualquer t .

□

Este resultado justifica que se considerem curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, pela simplificação de cálculos que daí resulta. As fórmulas deduzidas adaptam-se para quaisquer outras reparametrizações.

1.3 Curvatura e circunferência osculadora

Quando pensamos numa curva, é provável que a primeira imagem que nos ocorra seja a de uma trajetória com alteração contínua da direção. Quanto maior for a alteração da direção por unidade de distância percorrida mais acentuada será a curva. Assim

a forma da curva está associada à rapidez de alteração da sua direção, aquilo a que chamaremos curvatura. Com a curvatura queremos medir quanto “curva” uma curva.

Como medir a curvatura de uma curva? De acordo com a nossa intuição, a curvatura de uma recta deverá ser zero e a curvatura de uma circunferência deverá ser igual em todos os pontos e diminuir quando o raio aumenta. Então uma medida possível da curvatura em qualquer ponto da circunferência de raio r seria $\frac{1}{r}$ já que quando r aumenta $\frac{1}{r}$ diminui. Além disso, se considerarmos a reta como uma circunferência de raio infinito a sua curvatura seria zero.

No caso de uma curva parametrizada qualquer, $t \rightarrow \alpha(t)$, suave e regular, a parametrização define um sentido de percurso ao longo do traço da curva correspondente ao crescimento do parâmetro t . A direção da curva num ponto P é a direção do vetor tangente à curva nesse ponto, que pode ser medida pelo ângulo orientado φ que esse vetor faz com o semi-eixo positivo Ox . Medir a rapidez com que a curva muda a direção equivale a medir a variação do ângulo φ de um ponto para outro comparada com a distância percorrida. Isto sugere que a curvatura em qualquer ponto de α seja medida pela taxa de variação de φ com respeito ao comprimento de arco. A curvatura assim definida pode ser positiva, negativa ou nula. O valor absoluto da curvatura mede o grau de encurvamento, diminuindo quando a curva se torna menos acentuada. O sinal indica a orientação da curva sendo a curvatura positiva ou negativa consoante a curva vire à esquerda ou à direita.

1.3.1 Curvatura

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A parametrização define a orientação da curva no sentido em que s cresce. Seja $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ o vetor unitário tangente a α no ponto $\alpha(s)$. Para cada $s \in I$, define-se o vetor unitário normal $\vec{n}(s)$ que se obtém de $\vec{t}(s)$ por rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido positivo (anti-horário).

Assim se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ então

$$\begin{aligned}\vec{t}(s) &= (x'(s), y'(s)) \\ \vec{n}(s) &= (-y'(s), x'(s))\end{aligned}$$

Seja $\varphi(s)$ o ângulo orientado que $\vec{t}(s)$ faz com o semieixo positivo Ox (Fig. 1.1).

Definição 3 A curvatura com sinal de α no ponto $\alpha(s)$ é a taxa de variação da direção do vetor tangente a esse ponto com respeito ao comprimento de arco, isto é

$$k(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}.$$

Se a curva vira para a esquerda, $\varphi(s)$ aumenta juntamente com s logo a curvatura é positiva; se a curva vira para a direita, $\varphi(s)$ diminui quando s aumenta logo a curvatura

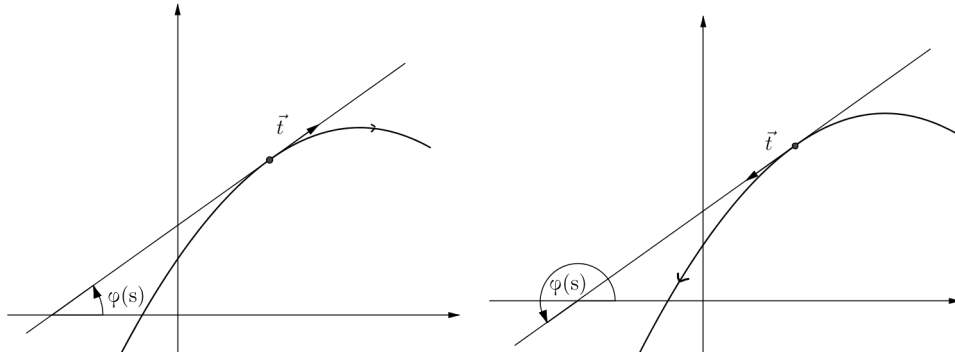


Figura 1.1: Ângulo do vetor tangente

é negativa (Fig. 1.2). Assim o sinal da curvatura num ponto depende da orientação dada pela parametrização. Se a orientação for alterada por uma reparametrização então o sinal da curvatura será também alterado.

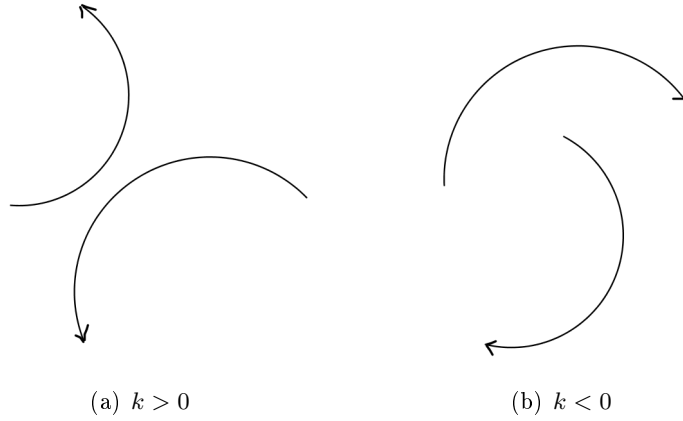


Figura 1.2: Sinal da curvatura

Sendo $\vec{t}(s)$ um vetor unitário, ele representa o vetor posição de um ponto da circunferência de raio 1 centrada na origem, logo temos

$$\begin{aligned}\vec{t}(s) &= (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \\ \vec{n}(s) &= (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))\end{aligned}$$

Derivando estas fórmulas obtemos

$$\begin{aligned}\vec{t}'(s) &= \varphi'(s) (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)) = \varphi'(s) \vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) &= \varphi'(s) (-\cos \varphi(s), -\sin \varphi(s)) = -\varphi'(s) \vec{t}(s)\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}\vec{t}'(s) &= k(s) \vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) &= -k(s) \vec{t}(s)\end{aligned}$$

concluindo-se que $\vec{t}'(s)$ é colinear com $\vec{n}(s)$ assim como $\vec{n}'(s)$ é colinear com $\vec{t}(s)$, e

ainda que

$$k(s) = \pm \|\vec{t}'(s)\| = \pm \|\alpha''(s)\|$$

De $\vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s)$ resulta, aplicando o produto escalar por $\vec{n}(s)$ a ambos os membros,

$$k(s) = \vec{t}'(s) \cdot \vec{n}(s)$$

e portanto

$$k(s) = x'y'' - x''y'$$

Exemplo 1 *Cálculo da curvatura da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.*

Se considerarmos a parametrização pelo comprimento de arco dada por

$$\alpha(s) = r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right)$$

a circunferência fica orientada no sentido anti-horário, logo a curvatura será positiva.

Temos que

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right), \\ \vec{n}(s) &= \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right), \\ \vec{t}'(s) &= \alpha''(s) = -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{n}(s) \end{aligned}$$

Donde

$$k(s) = \frac{1}{r}$$

Se considerarmos agora a parametrização pelo comprimento de arco dada por

$$\alpha(s) = r \left(\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$$

a circunferência fica orientada no sentido horário, logo a curvatura será negativa. Temos que

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r} \right), \\ \vec{n}(s) &= \left(\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right), \\ \vec{t}'(s) &= \alpha''(s) = -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) = -\frac{1}{r} \vec{n}(s) \end{aligned}$$

Donde

$$k(s) = -\frac{1}{r}$$

Em valor absoluto a curvatura da circunferência é constante e igual ao inverso do seu raio.

□

A cada curva planar está associada a função curvatura, o próximo resultado [7]

mostra que dada a função curvatura esta determina a curva a menos de um movimento rígido¹.

Teorema 2 *Dada uma função diferenciável $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe alguma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja curvatura em $\alpha(s)$ é $k(s)$. Qualquer outra curva com a mesma função curvatura é a composta de α com algum movimento rígido do plano.*

Demonstração.

Seja $s_0 \in [a, b]$ e defina-se para qualquer $s \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \int_{s_0}^s k(u) du \\ \alpha(s) &= \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right)\end{aligned}$$

Esta curva satisfaz as condições pedidas pois $\alpha'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ que é um vetor unitário que faz um ângulo $\varphi(s)$ com o eixo dos xx , logo a curvatura de α é dada por $\varphi'(s) = k(s)$. Ficando assim demonstrada a existência de α .

Seja agora $\tilde{\alpha}$ outra curva com a mesma função curvatura. Então

$$\tilde{\alpha}'(s) = (\cos \tilde{\varphi}(s), \sin \tilde{\varphi}(s)) \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}'(s) = k(s).$$

Portanto

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^s k(u) du + C = \varphi(s) + C \quad \text{com} \quad C = \tilde{\varphi}(s_0)$$

e

$$\tilde{\alpha}(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \tilde{\varphi}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \tilde{\varphi}(t) dt \right) + \tilde{\alpha}(s_0)$$

donde

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s_0) + \left(\int_{s_0}^s \cos (\varphi(t) + C) dt, \int_{s_0}^s \sin (\varphi(t) + C) dt \right)$$

Como

$$\begin{aligned}\cos (\varphi(t) + C) &= \cos \varphi(t) \cos C - \sin \varphi(t) \sin C \\ \sin (\varphi(t) + C) &= \sin \varphi(t) \cos C + \cos \varphi(t) \sin C\end{aligned}$$

resulta que

$$\left(\int_{s_0}^s \cos (\varphi(t) + C) dt, \int_{s_0}^s \sin (\varphi(t) + C) dt \right)$$

¹Por movimento rígido entendemos a composição de uma translação com uma rotação

é dado por

$$\left(\cos C \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt - \sin C \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt, \cos C \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt + \sin C \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt \right)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt \\ \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \end{pmatrix}$$

E portanto,

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s_0) + \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{pmatrix} \alpha(s)$$

A rotação de ângulo $C = \tilde{\varphi}(s_0)$ seguida da translação associada ao vetor $\tilde{\alpha}(s_0)$ transforma α em $\tilde{\alpha}$.

□

Exemplo 2 *Provemos que as únicas curvas com curvatura constante não nula são circunferências (ou arcos de circunferências).*

Seja $k(s) = c$, $c \neq 0$. Pelo teorema anterior, existe uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja curvatura com sinal é igual a c . Para determinar tal curva fazemos

$$\varphi(s) = \int_0^s c du = cs$$

logo

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos(ct) dt, \int_0^s \sin(ct) dt \right) = \left(\frac{1}{c} \sin(cs), -\frac{1}{c} \cos(cs) + \frac{1}{c} \right)$$

Fazendo $r = \frac{1}{c}$ vem

$$\left(r \sin \frac{s}{r}, -r \cos \frac{s}{r} + r \right) = \left(r \sin \frac{s}{r}, -r \cos \frac{s}{r} \right) + (0, r)$$

Como $\left(r \sin \frac{s}{r}, -r \cos \frac{s}{r} \right)$ é uma parametrização da circunferência de raio $|r|$ e centro $(0, 0)$, o traço de α é a circunferência de raio $|r|$ e centro $(0, r)$. Qualquer outra curva com curvatura constante é a composta de α com um movimento rígido do plano. Como rotações e translações transformam circunferências em circunferências conclui-se o pretendido.

□

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva arbitrária não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, define-se a curvatura de α como a curvatura de uma qualquer reparametrização de α pelo comprimento de arco. Como a reparametrização

pelo comprimento de arco nem sempre conduz a fórmulas simples, torna-se necessário encontrar uma fórmula para a curvatura em função do parâmetro dado.

O vetor unitário tangente de α é definido por

$$\vec{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{v(t)} \alpha'(t)$$

logo

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} (x', y')$$

O vetor unitário normal é obtido por rotação do vetor \vec{t} no sentido positivo de $\frac{\pi}{2}$ radianos

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} (-y', x')$$

Seja $\tilde{\alpha}(s)$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. O vetor unitário tangente e a curvatura de $\tilde{\alpha}$ no ponto $\tilde{\alpha}(s)$ são, respetivamente, $\vec{\tilde{t}}(s) = \tilde{\alpha}'(s)$ e $\tilde{k}(s)$. Se $k(t)$ é a curvatura de α no ponto $\alpha(t)$ então $k(t) = \tilde{k}(s(t))$.

De $\vec{t}(t) = \vec{\tilde{t}}(s(t))$ resulta derivando ambos os membros

$$\begin{aligned} \vec{t}'(t) &= \vec{\tilde{t}}'(s(t)) \frac{ds}{dt} \\ &= \tilde{k}(s(t)) \vec{\tilde{n}}(s(t)) \frac{ds}{dt} \\ &= k(t) \vec{n}(t) \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

A última igualdade pode ser reescrita na forma (omitindo t para simplificar a notação)

$$\vec{t}' = kv \vec{n}$$

Por outro lado, como

$$\alpha' = v \vec{t}$$

resulta derivando

$$\begin{aligned} \alpha'' &= v' \vec{t} + v \vec{t}' \\ &= v' \vec{t} + v(kv \vec{n}) \\ &= v' \vec{t} + v^2 k \vec{n} \end{aligned}$$

Formando o produto interno de ambos os membros da ultima igualdade com \vec{n} resulta

$$\alpha'' \cdot \vec{n} = v^2 k$$

donde

$$k = \frac{1}{v^2} \alpha'' \cdot \vec{n} = \frac{1}{v^3} \alpha'' \cdot v \vec{n}$$

Obtém-se assim a fórmula para a curvatura de α

$$\begin{aligned} k &= \frac{(x'', y'') \cdot (-y', x')}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} \\ &= \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

1.3.2 Circunferência osculadora

“If a Circle touches any Curve on its concave side, in any given point, and if it be of such magnitude that no other tangent Circle be inscribed in the angle of contact of that Point, that Circle will be of the same Curvature as the Curve is of, in the Point of Contact. Therefore the Centre of Curvature to any Point of the Curve is the Centre of the Circle equally curved, and thus the Radius or Semi-diameter of Curvature is Part of the Perpendicular to the Curve which is terminated at the Centre.”

Isaac Newton, The Method of Fluxions

Veremos que em qualquer ponto de curvatura não nula de uma curva α existe uma circunferência que passa nesse ponto, com a mesma curvatura e a mesma tangente que a curva nesse ponto. O centro e o raio dessa circunferência são denominados respetivamente por centro de curvatura e raio de curvatura de α nesse ponto e a circunferência por circunferência osculadora. Esta circunferência é aquela que tem maior ordem de contacto com α no ponto considerado.

Também podemos dizer que a circunferência osculadora passa por três pontos infinitamente próximos da curva. Mais especificamente, a circunferência osculadora em $P_0 = \alpha(t_0)$ pode ser considerada como a posição limite das circunferências que passam por P_0 e por outros dois pontos da curva suficientemente próximos de P_0 , $P_1 = \alpha(t_1)$ e $P_2 = \alpha(t_2)$, quando t_1 e t_2 tendem para t_0 (Fig. 1.3). Nesse caso o centro de curvatura é a posição limite dos centros dessas circunferências, e o raio de curvatura o limite da sucessão dos seus raios.

Num arco da curva com curvatura monótona, crescente ou decrescente, veremos que as circunferências osculadoras dispõem-se umas dentro das outras sendo duas a duas disjuntas.

Definição 4 *Seja $\alpha(t_0)$ um ponto regular de uma curva α . O centro de curvatura de α em $\alpha(t_0)$ é o ponto*

$$\alpha_*(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} \vec{n}(t_0)$$

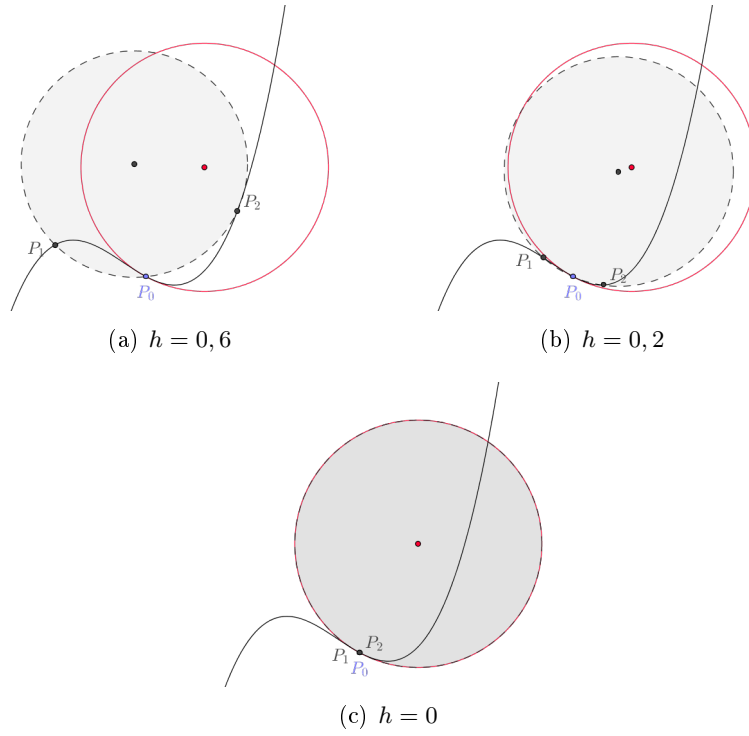


Figura 1.3: Circunferência osculadora como limite das circunferências que passam por $P_0 = \alpha(t_0)$, $P_1 = \alpha(t_0 - h)$ e $P_2 = \alpha(t_0 + h)$, quando $h \rightarrow 0$

e a grandeza

$$\frac{1}{|k(t_0)|}$$

é o raio de curvatura de α em $\alpha(t_0)$.

O centro de curvatura situa-se na normal à curva no ponto $\alpha(t_0)$ a uma distância igual ao raio de curvatura e está à “esquerda” da curva (no sentido de $\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) > 0$ e à “direita” da curva (no sentido de $-\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) < 0$. Em qualquer caso o centro de curvatura está no lado côncavo da curva (Fig. 1.4).

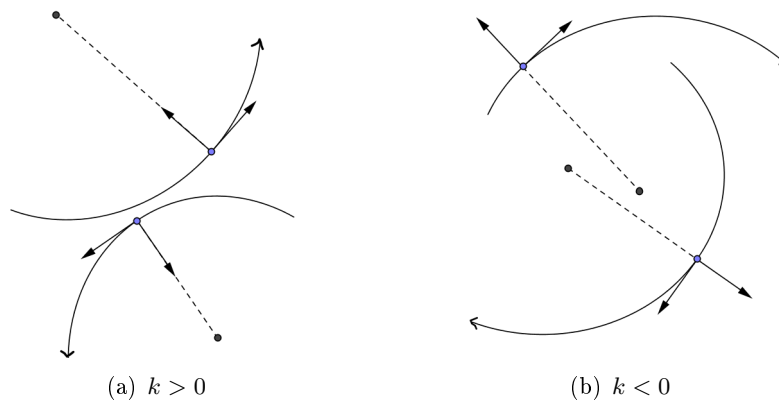


Figura 1.4: Centros de curvatura

Definição 5 *Seja $\alpha(t_0)$ um ponto regular de uma curva α com curvatura k_0 , não nula, para $t = t_0$. A circunferência osculadora no ponto $\alpha(t_0)$ é a circunferência com centro no centro de curvatura e raio igual ao raio de curvatura, sendo*

$$C(s) = \alpha_*(t_0) + \frac{1}{k_0} (\cos(k_0 s), \sin(k_0 s)), \quad 0 \leq s \leq \frac{2\pi}{|k_0|}$$

sua parametrização pelo comprimento de arco.

Dada uma curva α qualquer podemos medir numa vizinhança de cada um dos seus pontos quanto a curva se aproxima de uma circunferência. O grau de proximidade de duas curvas, α e β , na vizinhança de um ponto comum é medido pela ordem de contacto. Se α for uma curva parametrizada $t \rightarrow \alpha(t)$ e β estiver definida implicitamente por $f(x, y) = 0$, definimos $\gamma(t) = f(x(t), y(t)) = f(\alpha(t))$ cujos zeros são os pontos comuns das duas curvas, isto é, $\gamma(t_0) = 0$ se e só se $\alpha(t_0)$ pertencer à curva β .

Definição 6 *Seja $\alpha(t_0)$ um ponto regular de α e não singular de β . As curvas têm contacto de ordem n no ponto $P_0 = \alpha(t_0)$ se*

$$\gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = \dots = \gamma^{(n)}(t_0) = 0 \quad \wedge \quad \gamma^{(n+1)}(t_0) \neq 0$$

Se as curvas têm ordem de contacto ≥ 1 em $\alpha(t_0)$, isto é, se $\gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = 0$ então as curvas têm a mesma tangente em $\alpha(t_0)$. De facto de

$$\gamma' = f_x x' + f_y y' = \text{grad } f \cdot \alpha'$$

resulta que $\gamma'(t_0) = 0$ se e só se o gradiente de f , que é normal a $f(x, y) = 0$ em $\alpha(t_0)$, é ortogonal a $\alpha'(t_0)$ que é tangente a α em $\alpha(t_0)$.

Vamos verificar agora que a circunferência que melhor se aproxima de uma curva numa vizinhança de um dos seus pontos é a circunferência osculadora.

Teorema 3 *Dada uma curva α , a circunferência com maior ordem de contacto com α num ponto de curvatura não nula é a circunferência osculadora nesse ponto.*

Demonstração.

Em cada ponto $P_0 = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ pretendemos medir o grau de proximidade da curva α com uma circunferência. Para isso consideremos uma circunferência qualquer, com centro (a, b) e que passe em P_0 , de equação $f(x, y) = 0$ onde

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2, \quad R > 0$$

e a função

$$\gamma(t) = f(\alpha(t)) = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 - R^2$$

ou

$$\gamma(t) = \|\alpha(t) - (a, b)\|^2 - R^2$$

Como a circunferência passa em P_0 , $t = t_0$ é uma solução óbvia da equação $\gamma(t) = 0$. Além disso, a circunferência que melhor se aproxima da curva em P_0 será aquela para a qual $\gamma(t)$ tenha o maior número de derivadas nulas em t_0 :

$$\gamma'(t_0) = 0, \gamma''(t_0) = 0, \dots, \gamma^{(n)}(t_0) = 0, \dots$$

No entanto como uma circunferência depende apenas de três parâmetros, as duas coordenadas do centro e o raio, em geral o contacto é de ordem 2, ficando a circunferência determinada apenas pelas três condições

$$\gamma(t_0) = 0, \gamma'(t_0) = 0, \gamma''(t_0) = 0$$

Derivando γ obtemos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= 2\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - (a, b)) \\ \gamma''(t) &= 2 \left[\alpha''(t) \cdot (\alpha(t) - (a, b)) + \|\alpha'(t)\|^2 \right]\end{aligned}$$

Vejamos que a , b e R ficam determinados pelas condições

$$\|\alpha(t_0) - (a, b)\|^2 = R^2 \tag{1.3.1}$$

$$\alpha'(t_0) \cdot (\alpha(t_0) - (a, b)) = 0 \tag{1.3.2}$$

$$\alpha''(t_0) \cdot (\alpha(t_0) - (a, b)) + \|\alpha'(t_0)\|^2 = 0 \tag{1.3.3}$$

De 1.3.2 conclui-se que $\alpha(t_0) - (a, b)$ é um vetor normal a α em $\alpha(t_0)$ donde

$$\alpha(t_0) - (a, b) = \lambda \vec{n}(t_0)$$

substituindo em 1.3.1 obtém-se $\|\lambda \vec{n}(t_0)\|^2 = R^2$ donde

$$|\lambda| = R$$

e substituindo em 1.3.3 obtém-se $\alpha''(t_0) \cdot \lambda \vec{n}(t_0) + \|\alpha'(t_0)\|^2 = 0$ pelo que

$$\frac{1}{\|\alpha'(t_0)\|^2} \alpha''(t_0) \cdot \vec{n}(t_0) = -\frac{1}{\lambda} = k(t_0)$$

onde $k(t_0)$ representa a curvatura de α em $\alpha(t_0)$.

Portanto R é o raio de curvatura em $\alpha(t_0)$ já que

$$R = |\lambda| = \frac{1}{|k(t_0)|}$$

e (a, b) é o centro de curvatura de α em $\alpha(t_0)$, pois

$$\begin{aligned}(a, b) &= \alpha(t_0) - \lambda \vec{n}(t_0) \\ &= \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} \vec{n}(t_0)\end{aligned}$$

Concluimos assim que a circunferência que procurávamos é a circunferência osculadora.

□

Na situação típica a circunferência osculadora atravessa a curva no ponto de contacto, o que acontece sempre que a ordem de contacto nesse ponto for par e mantém-se do mesmo lado da curva numa vizinhança do ponto de contacto se a ordem de contacto nesse ponto for ímpar. De facto, para que a circunferência osculadora atravessasse a curva α no ponto de contacto $\alpha(t_0)$, $\gamma(t)$ tem de mudar de sinal em t_0 o que se verifica no caso do contacto ser de ordem par.

Pelo teorema Tait-Kneser [2], descoberto por Peter Tait no final do século XIX e redescoberto por Adolf Kneser no início do século XX, sabemos que ao longo de um arco de uma curva com curvatura monótona de sinal constante, as circunferências osculadoras dispõem-se encaixadas umas dentro das outras sendo duas a duas disjuntas.

Teorema 4 *Qualquer circunferência osculadora de um arco de uma curva regular com curvatura monótona de sinal constante contém cada uma das menores circunferências osculadoras desse arco e está contida em cada uma das circunferências osculadoras maiores desse arco.*

Demonstração.

Seja $\alpha(s)$ uma parametrização da curva pelo comprimento de arco e $\alpha(s_0)$ um ponto da curva. Suponhamos que $k(s)$ é crescente e positiva em $[s_0, s_1]$.

Vejamus que $\forall s \in]s_0, s_1]$ a circunferência osculadora em $\alpha(s)$ está contida na circunferência osculadora em $\alpha(s_0)$.

Seja $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$ a curva constituída pelos centros das circunferências osculadoras. A sua velocidade é dada por

$$\begin{aligned}c'(s) &= \alpha'(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)} \vec{n}(s) \\ &= \vec{t}(s) + \frac{1}{k(s)} (-k(s) \vec{t}(s)) - \frac{k'(s)}{k^2(s)} \vec{n}(s) \\ &= -\frac{k'(s)}{k^2(s)} \vec{n}(s)\end{aligned}$$

e a velocidade escalar por $\|c'(s)\| = \frac{k'(s)}{k^2(s)}$.

Como a curvatura de α nunca se anula, a curvatura de c também nunca se anula, então o comprimento de qualquer corda de c é menor do que o comprimento do arco

correspondente. Em particular tem-se

$$\|c(s) - c(s_0)\| = \left\| \int_{s_0}^s c'(u) du \right\| \leq \int_{s_0}^s \|c'(u)\| du \quad (1.3.4)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^s \|c'(u)\| du &= \int_{s_0}^s \frac{k'(u)}{k^2(u)} du \\ &= -\frac{1}{k(s)} + \frac{1}{k(s_0)} \end{aligned}$$

a desigualdade 1.3.4 traduz que a distância entre os centros das circunferências osculadoras em $\alpha(s_0)$ e $\alpha(s)$ é menor que a diferença dos seus raios, pelo que a segunda circunferência está estritamente contida na primeira.

Com efeito, se P é um ponto da circunferência osculadora em $\alpha(s)$ ou no seu interior, então

$$\begin{aligned} \|P - c(s_0)\| &\leq \|P - c(s)\| + \|c(s) - c(s_0)\| \\ &\leq \frac{1}{k(s)} + \frac{1}{k(s_0)} - \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{k(s_0)} \end{aligned}$$

isto é, P está no interior da circunferência osculadora em $\alpha(s_0)$.

□

Exemplo 3 *Disposição das circunferências osculadoras ao longo de um arco de elipse.*

Consideremos a elipse parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, onde $a > b > 0$. $\alpha'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$ e $\alpha''(t) = (-a \cos(t), -b \sin(t))$, logo a curvatura é dada por

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

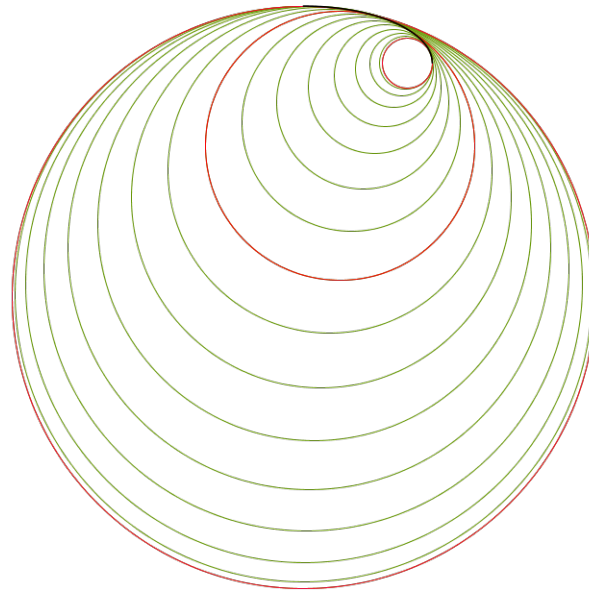
e

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

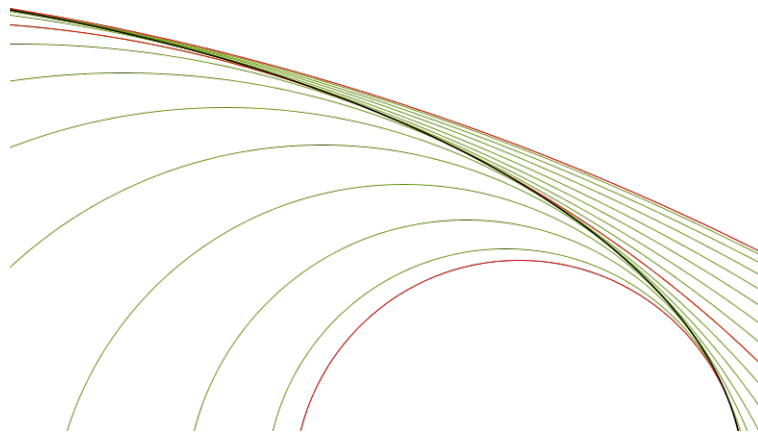
O máximo e o mínimo da função curvatura são respetivamente $\frac{a}{b^2}$ e $\frac{b}{a^2}$ e ocorrem nos vértices. Nestes, k' anula-se, e as circunferências osculadoras têm contacto de ordem 3 com a elipse enquanto nos restantes pontos o contacto é de segunda ordem. Para $0 < t < \frac{\pi}{2}$, tem-se que $k' < 0$ e portanto a curvatura é decrescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. No arco correspondente a este intervalo as circunferências osculadoras ocupam

a área entre a de menor raio, em $t = 0$, e a de maior raio, em $t = \frac{\pi}{2}$, sendo disjuntas duas a duas. (Fig. 1.5)

□



(a) As circunferências osculadoras nos vértices não cruzam a elipse (ordem de contacto 3), nos restantes pontos cruzam a elipse (ordem de contacto 2)



(b) As circunferências osculadoras são disjuntas, dispostas umas dentro das outras

Figura 1.5: Família de circunferências osculadoras nos pontos do arco da elipse $\alpha(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2

Evolutas e Involutas

O lugar geométrico dos centros de curvatura de uma curva regular α é uma nova curva com o nome de evoluta. O processo inverso de formação da evoluta corresponde a procurar uma curva, denominada involuta, que admita a primeira como evoluta. Este processo conduz à família de curvas paralelas a α . Alternativamente, a evoluta pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos irregulares das curvas paralelas a α ou como a envolvente das normais a α . Uma involuta pode ser definida como a curva descrita pela extremidade de um fio que é mantido esticado enquanto se enrola ou desenrola ao longo de α .

2.1 Evoluta

Chama-se evoluta de uma curva ao lugar geométrico constituído pelos centros de curvatura dessa curva.

Definição 7 *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva com curvatura sempre não nula, então a sua evoluta é a curva $\alpha_* : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por*

$$\begin{aligned}\alpha_*(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t) \quad (t \in I) \\ &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)v(t)}(-y'(t), x'(t))\end{aligned}$$

Exemplo 4 *Evoluta de uma circunferência.*

Como qualquer circunferência C tem curvatura constante e igual em valor absoluto ao inverso do seu raio, conclui-se que o centro de curvatura em qualquer ponto de C coincide com o centro da circunferência. Assim o traço da evoluta de uma circunferência resume-se a um único ponto, o seu centro.

□

Exemplo 5 *Evoluta de uma elipse.*

Dada a elipse parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, onde $a > b > 0$ e $t \in [0, 2\pi[$, temos que $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, $\alpha''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$ e $k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Então, como $k(t) \neq 0 \forall t$, a evoluta (Fig. 2.1(a)) é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_*(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)v(t)}(-y'(t), x'(t)) \\ &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}(-b \cos t, -a \sin t) \\ &= \left(a \cos t - \frac{a^2 \sin^2 t \cos t + b^2 \cos^3 t}{a}, b \sin t - \frac{a^2 \sin^3 t + b^2 \cos^2 t \sin t}{b} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{a} \sin^3 t \right). \end{aligned}$$

□

Exemplo 6 *Evoluta da parábola semicúbica*

Dada a parábola semicúbica parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ e $\alpha''(t) = (2, 6t)$; α tem exatamente um ponto não regular em $t = 0$ (no qual a curvatura não está definida). Nos pontos regulares de α , a curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{6}{|t|(4 + 9t^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Logo a evoluta (Fig. 2.1(b)) é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_*(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)v(t)}(-y'(t), x'(t)) \\ &= (t^2, t^3) + \frac{4 + 9t^2}{6}(-3t^2, 2t) \\ &= \left(-t^2 - \frac{9}{2}t^4, 4t^3 + \frac{4}{3}t \right), \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

Note-se que, embora $\alpha(0)$ seja um ponto não regular de α , a fórmula da evoluta tem significado para $t = 0$. O facto da evoluta estar definida em $t = 0$ justifica-se porque quando $t \rightarrow 0$, $k(t) \rightarrow +\infty$ e consequentemente o raio de curvatura tende para zero. Portanto, quando $t \rightarrow 0$, $\alpha_*(t) \rightarrow \alpha(0)$. Logo definindo $\alpha_*(0) = \alpha(0)$, temos

$$\alpha_*(t) = \left(-t^2 - \frac{9}{2}t^4, 4t^3 + \frac{4}{3}t \right), \quad \forall t.$$

□

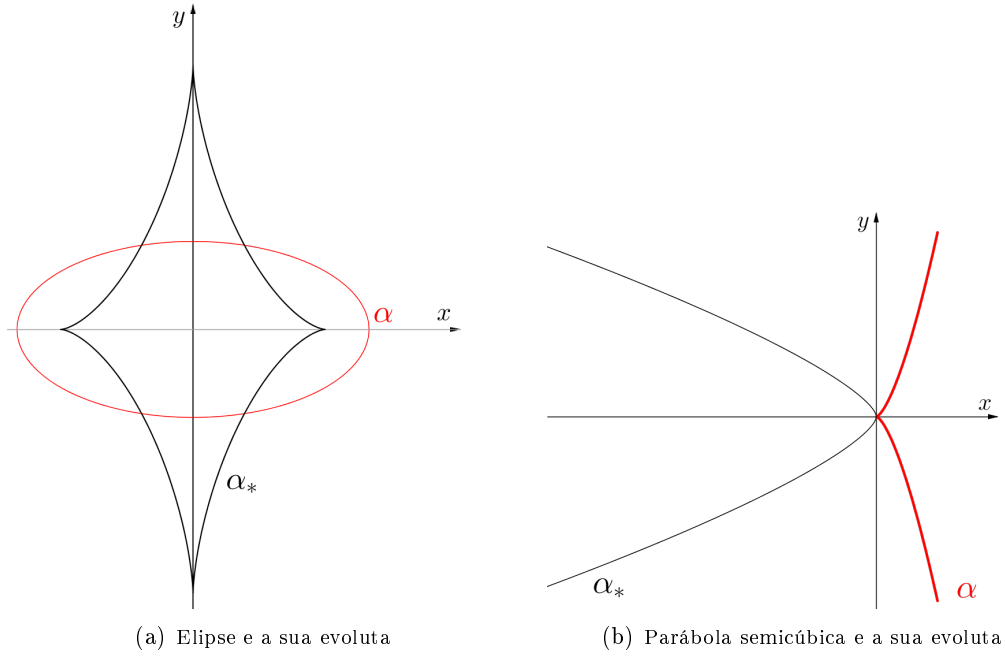


Figura 2.1: Evolutas

Teorema 5 *Se α e α_* são regulares em $t = t_0$ então a tangente à evoluta em $\alpha_*(t_0)$ é a reta normal a α em $\alpha(t_0)$ e vice-versa.*

Demonstração.

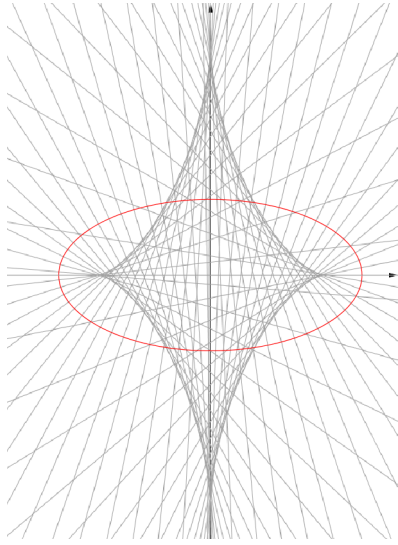
Derivando $\alpha_*(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t)$ em ordem a t , tem-se

$$\begin{aligned}\alpha'_* &= \alpha' + \left(\frac{1}{k}\right)' \vec{n} + \frac{1}{k} \vec{n}' \\ &= v\vec{t} - \frac{k'}{k^2} \vec{n} - \frac{1}{k} kv\vec{t} \\ &= -\frac{k'}{k^2} \vec{n}\end{aligned}$$

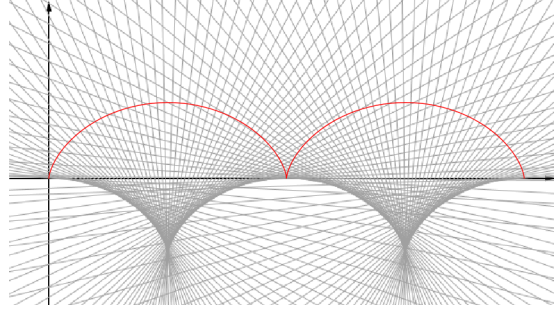
A última equação mostra que $\alpha'_*(t_0)$ é ortogonal a $\alpha(t_0)$ donde se concluiu que a tangente à evoluta em $\alpha_*(t_0)$ é a reta normal a α em $\alpha(t_0)$ e vice-versa.

□

Chama-se envolvente de uma família de curvas do plano a uma curva que é tangente a cada membro da família em algum ponto. Se desenharmos retas normais a uma curva qualquer α , estas retas concentram-se aparentemente ao longo de uma curva, envolvendo-a. Esta curva aparente corresponde à envolvente da família das normais a α . Como as normais a α são tangentes à sua evoluta concluímos que a envolvente da família das normais a α é a evoluta de α (Fig. 2.2).



(a) Normais a uma elipse



(b) Normais a uma cicloide

Figura 2.2: Evoluta como envolvente das normais de uma curva

2.2 Curvas Paralelas

Uma paralela a uma curva dada é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa da curva medida sobre as normais. Veremos que curvas paralelas têm os mesmos centros de curvatura e portanto a mesma evoluta.

Definição 8 Se α é uma curva regular, uma paralela a α à distância $|c|$, $c \in \mathbb{R}$ é a curva

$$\alpha_c = \alpha + c \vec{n}.$$

Retas paralelas e circunferências concêntricas são exemplos de curvas paralelas. Em ambos os casos as curvas paralelas são semelhantes à curva dada. Embora se possa esperar que tal aconteça para qualquer curva, deparamo-nos com o facto inicialmente surpreendente, de as curvas paralelas a uma curva dada não serem em geral semelhantes à curva original. A elipse é paralela a curvas com pontos não regulares (Fig. 2.3).

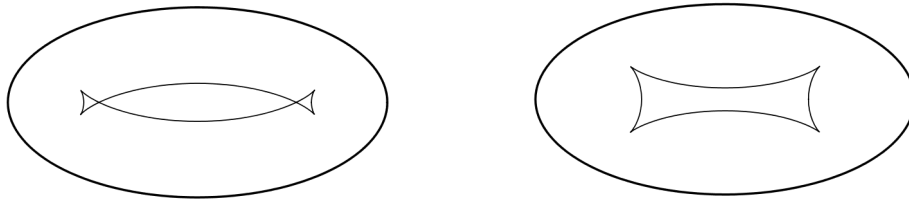


Figura 2.3: Curvas paralelas à elipse

A paralela α_c é uma curva diferenciável e a sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}\alpha'_c &= \alpha' + c \vec{n}' \\ &= \alpha' + c(-k v \vec{t}) \\ &= \alpha' - c k v \vec{t} \\ &= (1 - ck) \alpha'\end{aligned}$$

Desta igualdade resulta que se α_c é regular em t então os vetores tangentes a α e α_c para esse valor de t são paralelos. Terão o mesmo sentido se $1 - ck > 0$ ou sentidos contrários se $1 - ck < 0$. É claro que α_c terá a mesma normal que α em t , mas os vetores unitários normais podem ter sentidos diferentes, de acordo com os sentidos dos vetores tangentes. Como consequência imediata da mesma igualdade, sabemos que os pontos não regulares de α_c são aqueles para os quais $1 - c k(t) = 0$.

Teorema 6 *Seja α uma curva regular e α_c uma sua paralela. $\alpha_c(t_0)$ é um ponto não regular da paralela se e só se pertencer à evoluta de α , isto é, $\alpha_c(t_0) = \alpha_*(t_0)$.*

Demonstração.

Como α_c é não regular em t_0 se, e só se, $c = \frac{1}{k(t_0)}$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha_c(t_0) &= \alpha(t_0) + c \vec{n} \\ &= \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} \vec{n} \\ &= \alpha_*(t_0)\end{aligned}$$

donde resulta que $\alpha_c(t_0)$ pertence à evoluta de α e portanto os pontos não regulares das paralelas a α percorrem a sua evoluta.

□

Veremos agora que duas curvas paralelas têm a mesma evoluta em valores de t para os quais ambas são regulares e de curvatura não nula.

Teorema 7 *Se para um dado valor de t os pontos de uma curva α e uma sua paralela α_c são regulares e de curvatura não nula então os centros de curvatura de ambas as curvas nesses pontos são coincidentes.*

Demonstração.

Com efeito, derivando os vetores unitários normais às curvas α e α_c , temos

$$\begin{aligned}\vec{n}' &= -k \alpha' \\ \vec{n}'_c &= -L \alpha'_c\end{aligned}$$

onde k e L representam, respetivamente, o valor da curvatura em α e na sua paralela.

Se $1 - ck > 0$ temos que $k \alpha' = L\alpha'_c = L(1 - ck)\alpha'$ logo $\frac{1}{L} = \frac{1}{k} - c$, e se $1 - ck < 0$ temos que $k \alpha' = -L\alpha'_c = -L(1 - ck)\alpha'$ logo $-\frac{1}{L} = \frac{1}{k} - c$.

Então o centro de curvatura da paralela é dado em qualquer dos casos por

$$\begin{aligned} C &= \alpha_c + \frac{1}{L} \vec{n}_c \\ &= \alpha + c\vec{n} + \left(\frac{1}{k} - c\right) \vec{n} \\ &= \alpha + \frac{1}{k} \vec{n}, \end{aligned}$$

que é o centro de curvatura de α .

□

Exemplo 7 *Curvas paralelas à elipse*

Vamos considerar as curvas paralelas à elipse parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } t \in [0, 2\pi[,$$

nas quais se incluem as indicadas na Fig. 2.3.

Temos que

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

A elipse tem quatro vértices correspondentes a $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ e $t = \frac{3}{2}\pi$. O valor máximo da curvatura é $\frac{a}{b^2}$ e ocorre para $t = 0$ e $t = \pi$; o valor mínimo é $\frac{b}{a^2}$ e ocorre para $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3}{2}\pi$.

Para $0 < t < \frac{\pi}{2}$, tem-se que $k'(t) < 0$, logo no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a curvatura decresce de $\frac{a}{b^2}$ para $\frac{b}{a^2}$ e portanto

$$\frac{b^2}{a} \leq \frac{1}{k(t)} \leq \frac{a^2}{b}.$$

Considere-se a família das curvas paralelas à elipse

$$\alpha_c(t) = \alpha(t) + c\vec{n}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Se $\frac{b^2}{a} < c < \frac{a^2}{b}$, então $\exists t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $c = \frac{1}{k(t_0)}$, isto é, $ck(t_0) = 1$, e portanto, $\alpha_c(t_0)$ é um ponto não regular de α_c , logo é também o centro de curvatura de α em t_0 . Por simetria a curva α_c terá quatro pontos não regulares, todos pertencentes à evoluta de α (Fig. 2.4(a)).

Se $c < \frac{b^2}{a}$ ou $c > \frac{a^2}{b}$ a paralela é regular (Fig. 2.4(b)).

Se $c = \frac{b^2}{a}$ a paralela é regular excepto em $t = 0$ e $t = \pi$ (Fig. 2.4(c)).

Se $c = \frac{a^2}{b}$ a paralela é regular excepto em $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3}{2}\pi$ (Fig. 2.4(d)).

□

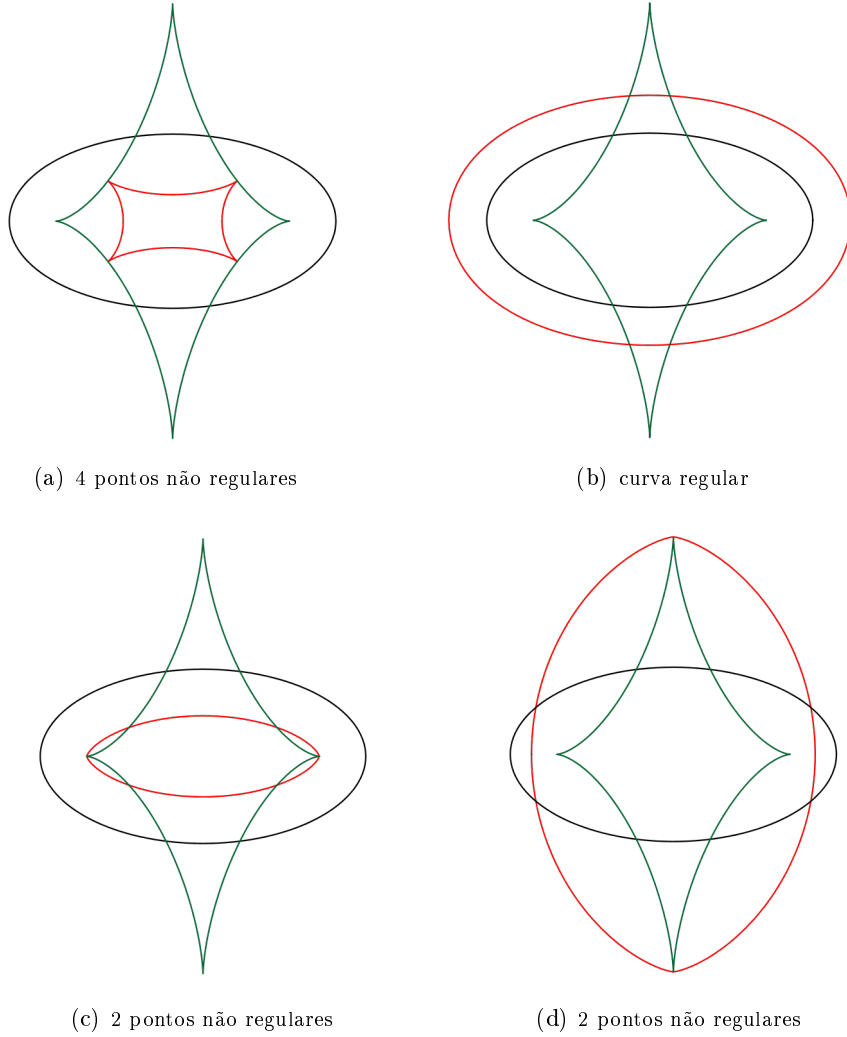


Figura 2.4: Pontos não regulares das curvas paralelas à elipse

2.3 Involutas

Definição 9 Uma involuta de uma curva α é uma curva α^* que tem como evoluta α , isto é $(\alpha^*)_* = \alpha$.

As involutas de uma curva não são únicas. Se α^* é uma involuta de α então α é a evoluta de α^* . Todas as paralelas a α^* terão α como evoluta, logo todas as paralelas

a α^* são involutas de α . Veremos agora que também se verifica que quaisquer duas involutas de uma mesma curva são paralelas.

Teorema 8 *Qualquer paralela a uma involuta de uma curva dada, numa vizinhança de um ponto regular e de curvatura não nula da involuta e da paralela, é uma involuta da curva. Inversamente quaisquer duas involutas de uma curva dada, numa vizinhança de um ponto regular e de curvatura não nula para ambas, são paralelas.*

Demonstração.

Já foi visto que curvas paralelas têm a mesma evoluta em valores de t para os quais ambas são regulares e de curvatura não nula (Teorema 7). Para provar o inverso consideremos duas curvas α e γ com a mesma evoluta. Assim

$$\alpha_*(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}_\alpha(t) = \gamma_*(t) = \gamma(t) + \frac{1}{L(t)} \vec{n}_\gamma(t)$$

Derivando obtém-se

$$-\frac{k'(t)}{k^2(t)} \vec{n}_\alpha(t) = -\frac{L'(t)}{L^2(t)} \vec{n}_\gamma(t)$$

donde

$$\frac{k'(t)}{k^2(t)} = \frac{L'(t)}{L^2(t)} \quad \text{ou} \quad \frac{k'(t)}{k^2(t)} = -\frac{L'(t)}{L^2(t)}$$

consoante os vetores $\vec{n}_\alpha(t)$ e $\vec{n}_\gamma(t)$ têm o mesmo sentido ou sentidos contrários. Integrando obtém-se, respetivamente,

$$\frac{1}{k(t)} = \frac{1}{L(t)} + c \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k(t)} = -\frac{1}{L(t)} + c.$$

Em qualquer dos casos,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}_\alpha(t) - \frac{1}{L(t)} \vec{n}_\gamma(t) \\ &= \alpha(t) + c \vec{n}_\alpha(t) \end{aligned}$$

e portanto γ é paralela a α .

□

O próximo resultado estabelece como pode ser utilizado o raio de curvatura de um arco de involuta para medir o comprimento do arco correspondente na evoluta.

Teorema 9 *Se α é uma curva com curvatura $k(t)$ não nula num intervalo $[t_0, t]$ e variando de um modo monótono nesse intervalo ($k' > 0$ ou $k' < 0$), então o comprimento de arco s_* da sua evoluta correspondente a esse intervalo é dado por*

$$s_*(t) = \text{sgn}(k') \left[\frac{1}{k(t_0)} - \frac{1}{k(t)} \right]$$

Demonstração.

Com efeito, de $s_*(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'_*(t)\| dt$ resulta que $\frac{d}{dt} s_*(t) = \|\alpha'_*(t)\| = \frac{|k'(t)|}{k^2(t)}$.

Mas

$$\frac{|k'(t)|}{k^2(t)} = -\operatorname{sgn}(k') \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k(t)} \right]$$

logo

$$\frac{d}{dt} \left[s_*(t) + \operatorname{sgn}(k') \frac{1}{k(t)} \right] = 0$$

e portanto

$$s_*(t) + \operatorname{sgn}(k') \frac{1}{k(t)} = s_*(t_0) + \operatorname{sgn}(k') \frac{1}{k(t_0)}$$

donde

$$s_*(t) = \operatorname{sgn}(k') \left[\frac{1}{k(t_0)} - \frac{1}{k(t)} \right]$$

□

A partir deste resultado podemos obter um processo mecânico para construir uma involuta a partir da sua evoluta. Fixando uma das extremidades de um fio inextensível num ponto da evoluta e enrolando-o na evoluta conservando-o esticado, a outra extremidade descreve uma involuta. Ou desenrolando um fio, que contorna a evoluta e está preso a esta numa das extremidades, conservando-o esticado, a outra extremidade descreve uma involuta. Diferentes involutas podem ser obtidas variando o comprimento do fio.

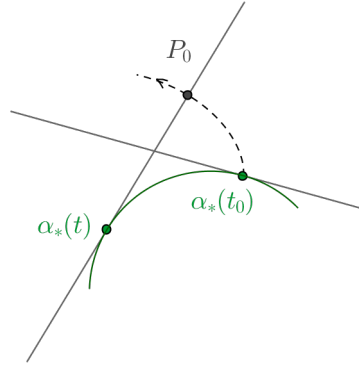


Figura 2.5: Construção da involuta

De facto, suponha-se que a extremidade livre do fio P se encontra na posição $\alpha_*(t_0)$. Ao desenrolar o fio, a posição de P será dada por

$$P(t) = \alpha_*(t) - s_*(t) \vec{t}_*(t)$$

onde $\vec{t}_*(t)$ é o vetor unitário tangente a α_* em t . Vejamos que se trata de uma involuta de α_* .

Como $\alpha'_*(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}\vec{n}(t)$ onde $\vec{n}(t)$ é o vetor unitário normal a uma involuta α de α_* , tem-se que $\vec{t}_*(t) = -\text{sgn}(k')\vec{n}(t)$. Logo

$$P(t) = \alpha_*(t) + \text{sgn}(k')s_*(t)\vec{n}(t)$$

e usando o teorema 9 tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t) + \left[\frac{1}{k(t_0)} - \frac{1}{k(t)} \right] \vec{n}(t) \\ &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{n}(t) \end{aligned}$$

que é uma paralela a α e portanto uma involuta de α_* .

Se a extremidade livre do fio estiver no ponto $\alpha_*(t_0)$ e nesse ponto considerarmos a tangente a α_* , na qual fixamos o ponto P_0 correspondente ao ponto de contacto da tangente com α_* em t_0 , a curva que descreve P_0 quando a tangente rola sem deslizar ao longo de α_* é a involuta descrita pela extremidade do fio ao ser desenrolado, pois o fio esticado é sempre tangente à curva (Fig. 2.5). Então a curva descrita por P_0 é definida por $P_0(t) = \alpha_*(t) - s_*(t)\vec{t}_*$ que é a involuta de α_* que começa em $\alpha_*(t_0)$. Se em vez de P_0 fixarmos outro ponto P pertencente à reta tangente em $\alpha_*(t_0)$, quando a tangente rola sem deslizar sobre α_* o ponto P descreve uma curva paralela àquela descrita por P_0 , e portanto descreve também uma involuta de α_* .

Exemplo 8 *Involutas da circunferência*

O comprimento de arco da circunferência dada por $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ a partir de $\alpha(t_0)$ é

$$s(t) = \int_{t_0}^t r \, dt = r(t - t_0).$$

Logo a involuta a começar em $\alpha(t_0)$ é dada por

$$\alpha^*(t) = (r \cos t, r \sin t) - r(t - t_0)(-\sin t, \cos t)$$

Se $t_0 = 0$ a involuta é dada por

$$\alpha^*(t) = (r \cos t + rt \sin t, r \sin t - rt \cos t)$$

Diferentes escolhas de t_0 dão outras involutas (Fig. 2.6).

□

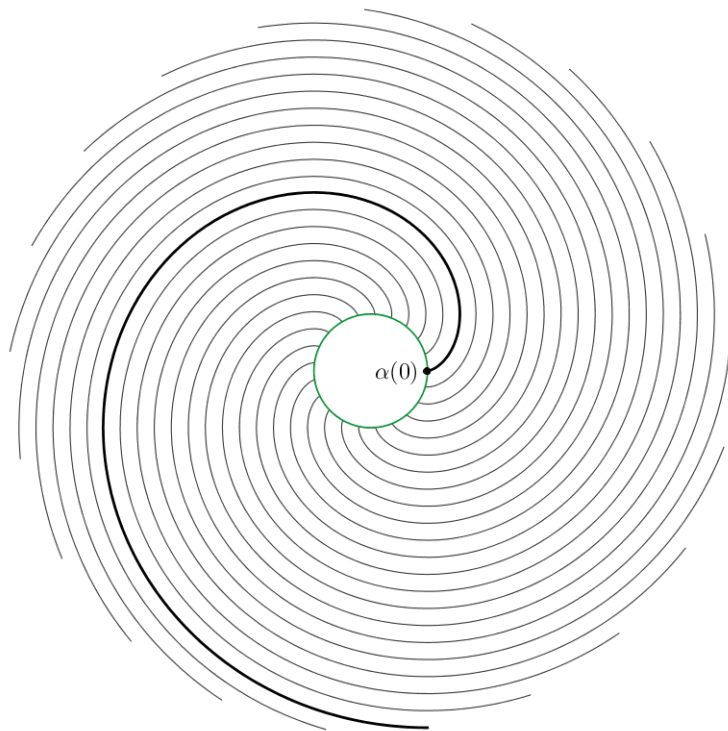


Figura 2.6: Involutas da circunferência

3

Roulettes

Já foi visto que quando uma reta rola, sem escorregar, ao longo de uma curva estacionária Γ , um ponto fixo da reta descreve nesse movimento uma involuta de Γ . Numa situação mais geral, substituindo a reta por uma curva qualquer a rolar, sem escorregar, numa curva estacionária Γ , a curva descrita por um ponto P não necessariamente na curva móvel mas rigidamente ligado a ela, é chamada *roulette*. Assim uma involuta de uma curva qualquer pode ser definida como a *roulette* gerada por um ponto de uma reta que rola sem deslizar sobre a curva. Exemplos familiares de *roulettes* são as cicloides, epicicloides e as hipocicloides.

3.1 Discussão geral

Definição 10 *Uma roulette é um lugar geométrico descrito por um ponto P rigidamente ligado a uma curva γ que rola sem deslizar sobre uma curva fixa Γ .*

Para descrever mais facilmente uma *roulette*, é essencial fazer uma escolha adequada das parametrizações das curvas γ e Γ . Note-se que no decorrer do movimento de γ em cada instante as duas curvas são tangentes no ponto de contacto.

Considere-se as parametrizações, no plano de Argand, das curvas móvel e fixa pelo comprimento de arco

$$\gamma : s \rightarrow z(s) \quad \text{e} \quad \Gamma : s \rightarrow w(s)$$

de tal modo que

1. $w(0) = z(0)$, isto é, os seus pontos iniciais correspondem a um ponto de contacto de ambas as curvas.
2. $w'(0) = z'(0)$, inicialmente os vetores tangentes são iguais, o que juntamente com a condição anterior garante que as curvas têm a mesma tangente no ponto inicial assim como a mesma orientação.

Note-se que como $\|w'(s)\| = \|z'(s)\| = 1 \neq 0$, $\forall s$ pode-se sempre supôr $w'(0) = z'(0)$, pois se $w'(0) = -z'(0)$ faz-se primeiro uma reparametrização de uma das curvas. Além

disso, como as duas curvas têm a mesma velocidade escalar (igual a 1), podemos afirmar que têm sempre a tangente bem definida e ainda que ambas têm o mesmo comprimento de arco pois

$$\int_0^s \|w'(u)\| du = \int_0^s \|z'(u)\| du = s$$

pelo que o comprimento de arco de γ desde $z(0)$ até $z(s)$ é igual ao comprimento de arco de Γ desde $w(0)$ até $w(s)$ logo $z(s)$ vai coincidir com $w(s)$ o que garante que γ rola sem deslizar.

Teorema 10 *A curva percorrida pelo ponto P rigidamente ligado a γ quando γ rola sem deslizar sobre a curva fixa Γ é parametrizada por*

$$Z(s) = w(s) + \frac{w'(s)}{z'(s)}(P - z(s))$$

onde w e z são as parametrizações consideradas anteriormente.

Demonstração.

Uma vez que $\int_0^s \|w'(u)\| du = \int_0^s \|z'(u)\| du = s$, se a curva γ rolar sobre Γ até que $z(s)$ seja o ponto de contacto das duas curvas, $z(s)$ ficará na posição de $w(s)$. Assim, o movimento de qualquer ponto rigidamente ligado a γ consiste na translação T que envia $z(s)$ em $w(s)$ seguida da rotação R com centro em $w(s)$ que envia $z'(s)$ em $w'(s)$ (Fig. 3.1).

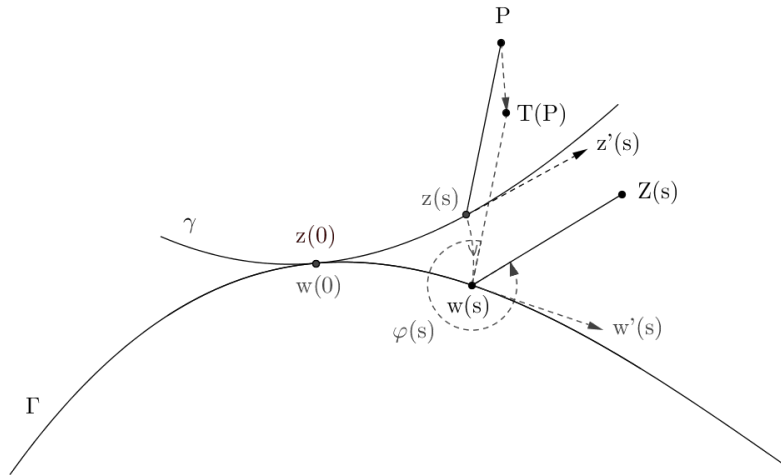


Figura 3.1: Construção da *roulette*

$$\begin{aligned} T(P) &= P + (w(s) - z(s)) \\ R(P) &= e^{i\varphi(s)}(P - w(s)) + w(s) \end{aligned}$$

onde $e^{i\varphi(s)}z'(s) = w'(s) \Leftrightarrow e^{i\varphi(s)} = \frac{w'(s)}{z'(s)}.$

Então

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= R \circ T(P) \\
 &= R(P + (w(s) - z(s))) \\
 &= \frac{w'(s)}{z'(s)} ((P + (w(s) - z(s)) - w(s)) + w(s)) \\
 &= w(s) + \frac{w'(s)}{z'(s)} (P - z(s))
 \end{aligned}$$

□

3.2 Cicloides

Cicloides são *roulettes* descritas por um ponto rigidamente ligado a uma circunferência que rola, sem deslizar, numa reta.

Consideremos no plano uma reta Γ fixa e uma circunferência γ com centro C e raio a , que rola sem deslizar sobre Γ . Seja O o ponto de contacto inicial da reta com a circunferência e P o ponto gerador da curva. Consideremos um referencial com origem em O , cujo eixo Ox coincide com Γ e o eixo Oy passa em $C = ia$, e as seguintes parametrizações das duas curvas:

$$\begin{aligned}
 \Gamma : \quad w(t) &= t \\
 \gamma : \quad z(t) &= ia + a(-i)e^{\frac{it}{a}} = ia(1 - e^{\frac{it}{a}})
 \end{aligned}$$

Estas parametrizações estão de acordo com o Teorema 10. Tem-se que $w(0) = z(0) = 0$; $w'(t) = 1$ e $z'(t) = e^{\frac{it}{a}}$ donde $w'(0) = z'(0) = 1$ e $\|w'(t)\| = \|z'(t)\| = 1, \forall t$.

Assim sendo, a curva descrita por P é dada por

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= t + \frac{1}{e^{\frac{it}{a}}} \left(P - ia(1 - e^{\frac{it}{a}}) \right) \\
 &= t + ai + e^{-\frac{it}{a}} (P - ai)
 \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher P no eixo Oy , dado que P ocupará essa posição em algum instante do movimento. Fazendo $P = bi$, $b \in \mathbb{R}$, isto é, no instante inicial P está na vertical que passa no centro da circunferência, a *roulette* tem as formas apresentadas na Fig. 3.2 que dependem da distância de P ao centro da circunferência. Consoante P pertence à circunferência, está no seu exterior ou no seu interior (diferente do centro) a *roulette* é uma cicloide, uma cicloide alongada ou uma cicloide encurtada.

As cicloides consideradas até agora foram obtidas fazendo rolar uma circunferência por cima de uma reta Γ fixa. Se a circunferência rolar por baixo da reta fixa, qualquer um dos seus pontos descreve uma curva que é designada por cicloide invertida. Procedendo de modo análogo encontramos facilmente a equação da cicloide invertida.

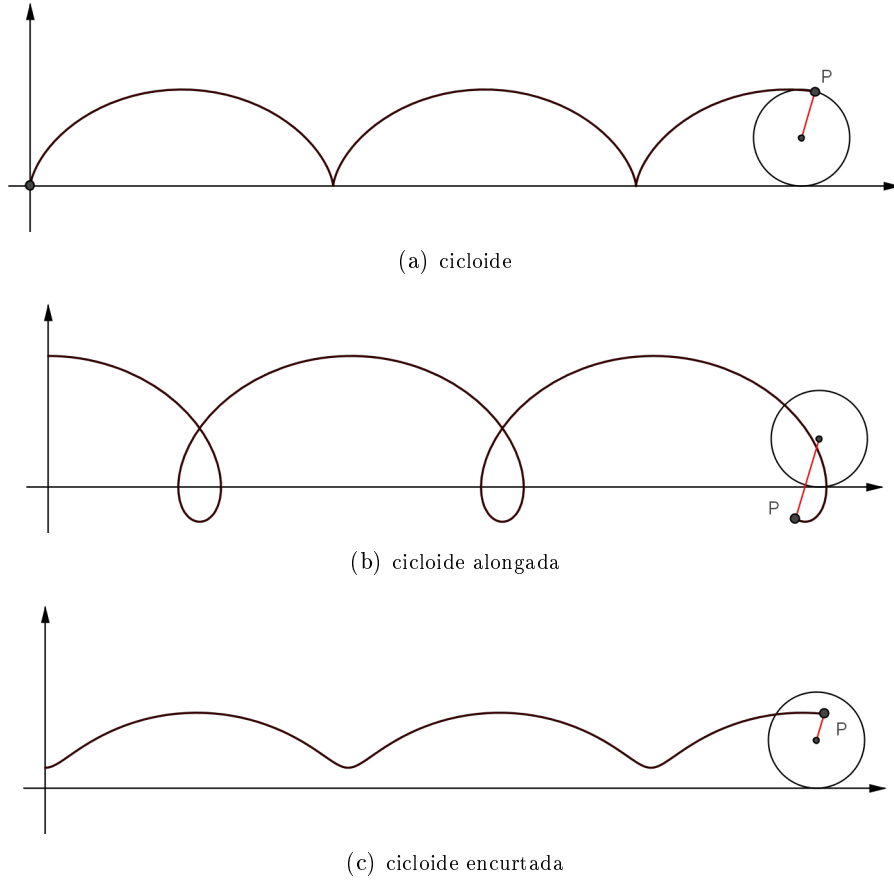


Figura 3.2: Cicloides

Seja γ uma circunferência com centro C e raio a que rola sem deslizar por baixo de uma reta Γ fixa. Seja r a reta paralela a Γ que é tangente γ e O o ponto de tangência de γ com r no instante inicial. Consideremos um referencial com origem em O , cujo eixo Ox coincide com r e o eixo Oy com a reta que contém $C = ia$ e o ponto de contacto inicial de γ com Γ . As seguintes parametrizações das duas curvas

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad w(t) &= t + 2ai \\ \gamma : \quad z(t) &= ia + aie^{-\frac{it}{a}} = ia(1 + e^{-\frac{it}{a}})\end{aligned}$$

estão de acordo com o Teorema 10. Tem-se que $w(0) = z(0) = 2ai$; $w'(t) = 1$ e $z'(t) = e^{-\frac{it}{a}}$ donde $w'(0) = z'(0) = 1$ e $\|w'(t)\| = \|z'(t)\| = 1, \forall t$.

Assim sendo, a curva descrita por um ponto P rigidamente ligado a γ é dada por

$$\begin{aligned}Z(t) &= t + 2ai + \frac{1}{e^{-\frac{it}{a}}} \left(P - ia(1 + e^{-\frac{it}{a}}) \right) \\ &= t + ai + e^{\frac{it}{a}}(P - ai)\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher P no eixo Oy , dado que P ocupará essa posição em algum instante do movimento. A cicloide invertida é obtida quando

fazemos $P = 0$ (ou $P = 2a$). Assim a sua equação é

$$Z(t) = t + ai - aie^{\frac{it}{a}} \quad (3.2.1)$$

e tem a forma apresentada na Fig. 3.3.

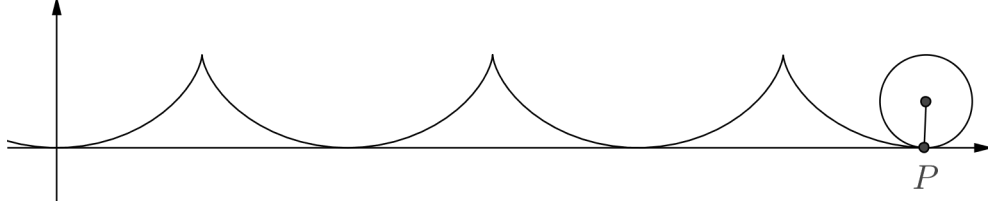


Figura 3.3: Cicloide invertida

3.3 Trocoides

Trocoides são *roulettes* em que as curvas fixa e móvel são ambas circunferências. Se duas circunferências tangentes têm os seus centros do mesmo lado da tangente comum, e uma delas está fixa enquanto a outra rola sem deslizar sobre a primeira, qualquer ponto pertencente a um diâmetro da circunferência móvel ou ao seu prolongamento descreve uma hipotrocoide. Se duas circunferências tangentes têm os seus centros um de cada lado da tangente comum, e uma delas está fixa enquanto a outra rola sem deslizar sobre a primeira, qualquer ponto pertencente a um diâmetro da circunferência móvel ou ao seu prolongamento descreve uma epitrocoide. Se o ponto que descreve uma hipotrocoide ou uma epitrocoide, pertence à circunferência móvel, a curva toma o nome de hipocicloide ou epicicloide respetivamente.

3.3.1 Epitrocoides

Consideremos uma circunferência, γ , de raio b a rolar sobre uma circunferência fixa, Γ , de raio a com os seus centros em lados contrários da tangente comum. Isto implica que a circunferência móvel rola no exterior da circunferência fixa.

Represente-se por O o centro da circunferência fixa, O' o centro da circunferência móvel, C o ponto de contacto das duas circunferências e P o ponto gerador da curva. Em algum instante os quatro pontos O , C , O' e P estarão alinhados sobre uma reta r , os três primeiros por esta ordem e P para a esquerda de O' . Consideremos um referencial com origem em O e cujo eixo Ox coincide com r (Fig. 3.4).

As seguintes parametrizações das duas circunferências

$$\begin{aligned} \Gamma: w(t) &= ae^{i\frac{t}{a}} \\ \gamma: z(t) &= a + b - be^{-i\frac{t}{b}} \end{aligned}$$

estão de acordo com o Teorema 10. Tem-se que $w(0) = z(0) = a$; $w'(t) = ie^{\frac{it}{a}}$ e

$z'(t) = ie^{-\frac{it}{b}}$ donde $w'(0) = z'(0) = i$ e $|w'(t)| = |z'(t)| = 1, \forall t$.

Assim sendo, a curva descrita por $P = a + b - hb$ com $h \geq 0$ é dada por

$$\begin{aligned} Z(t) &= ae^{i\frac{t}{a}} + \frac{ie^{i\frac{t}{a}}}{ie^{i\frac{t}{b}}} \left[a + b - hb - \left(a + b - be^{-i\frac{t}{b}} \right) \right] \\ &= ae^{i\frac{t}{a}} + e^{i\frac{t}{a}(\frac{a+b}{b})} \left(-hb + be^{-i\frac{t}{b}} \right) \\ &= (a+b)e^{i\frac{t}{a}} - hbe^{i\frac{t}{a}(\frac{a+b}{b})} \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{t}{a} = \varphi$ obtém-se para parametrização da epitrocoide

$$Z(\varphi) = (a+b)e^{i\varphi} - hbe^{i\varphi(\frac{a+b}{b})}, \quad h \geq 0$$

Uma epitrocoide depende de três parâmetros fixos, a, b, h e um variável, φ , pelo que será representada por $E[\varphi; a, b, h]$.

Em \mathbb{R}^2 , as correspondentes equações paramétricas de $E[\varphi; a, b, h]$ são

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= (a+b)\cos(\varphi) - hb\cos\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right) \\ y(\varphi) &= (a+b)\sin(\varphi) - hb\sin\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right) \end{aligned}$$

3.3.2 Hipotrocoides

Consideremos uma circunferência de raio b a rolar sobre uma circunferência fixa de raio a com os seus centros do mesmo lado da tangente comum. Isto implica que uma delas está no interior da outra, pelo que deverá ter-se $a \neq b$. Consoante $b < a$ ou $b > a$, a circunferência móvel rola no interior ou no exterior da circunferência fixa (Fig. 3.5).

1º caso: $a > b$

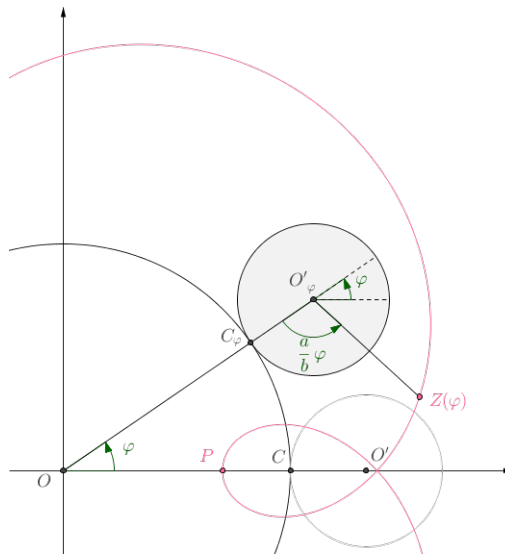


Figura 3.4: Construção da epitrocoide

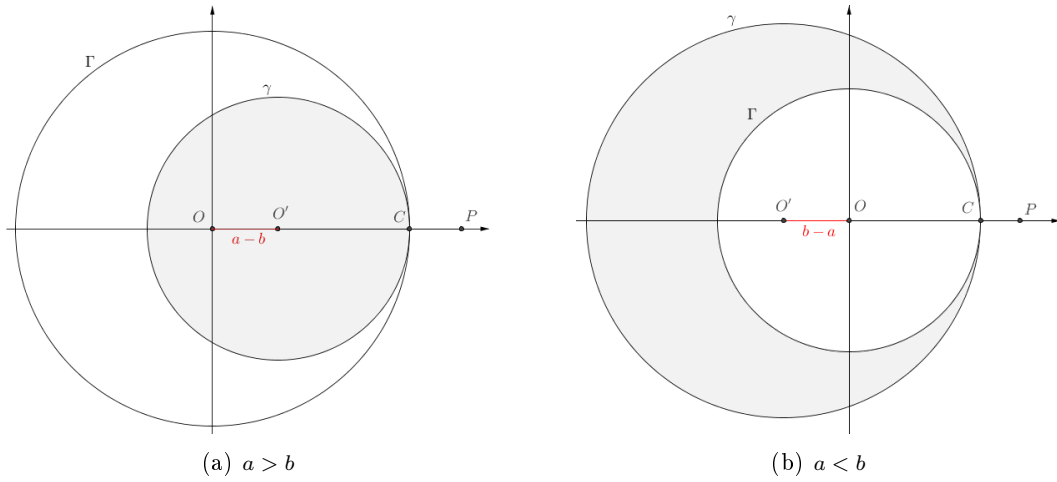


Figura 3.5: Posição inicial do ponto P , gerador da hipotrocoide

Em algum instante os quatro pontos O , O' , C e P estarão alinhados sobre uma reta r , os três primeiros por esta ordem e P para a direita de O' . Escolhendo o centro da circunferência fixa, O , para a origem do referencial e a reta r para o eixo Ox , obtemos parametrizações pelo comprimento de arco para as circunferências fixa e móvel, dadas respetivamente por

$$\begin{aligned}\Gamma: w(t) &= ae^{i\frac{t}{a}} \\ \gamma: z(t) &= a - b + be^{i\frac{t}{b}}.\end{aligned}$$

Dado que $w(0) = z(0) = a$, $w'(0) = z'(0) = i$ e $|w'(t)| = |z'(t)| = 1, \forall t$, as parametrizações estão de acordo com o Teorema 10, pelo que a curva descrita por $P = a - b + hb$ com $h \geq 0$ é dada por

$$\begin{aligned}Z_1(t) &= ae^{i\frac{t}{a}} + e^{i(\frac{t}{a} - \frac{t}{b})}(a - b + hb - (a - b) - be^{i\frac{t}{b}}) \\ &= (a - b)e^{i\frac{t}{a}} + hbe^{-i\frac{t}{a}(\frac{a-b}{b})}\end{aligned}$$

Fazendo $\frac{t}{a} = \varphi$ a parametrização da hipotrocoide, quando $a > b$, é

$$Z_1(\varphi) = (a - b)e^{i\varphi} + hbe^{-i\varphi(\frac{a-b}{b})}, \quad h \geq 0$$

2º caso: $a < b$

Procedendo de modo análogo ao 1º caso, em algum instante os quatro pontos O' , O , C e P estarão alinhados sobre uma reta r , os três primeiros por esta ordem e P para a direita de O' . Escolhendo o centro da circunferência fixa, O , para a origem do referencial e a reta r para o eixo Ox , obtemos parametrizações pelo comprimento de

arco para as circunferências fixa e móvel, dadas respetivamente por

$$\begin{aligned}\Gamma: w(t) &= ae^{i\frac{t}{a}} \\ \gamma: z(t) &= a - b + be^{i\frac{t}{b}}.\end{aligned}$$

Como as parametrizações estão de acordo com o Teorema 10, a curva descrita por $P = a - b + hb$ com $h \geq 0$ é dada por

$$Z_2(t) = (a - b)e^{i\frac{t}{a}} + hbe^{-i\frac{t}{a}\left(\frac{a-b}{b}\right)}$$

logo fazendo $\frac{t}{a} = \varphi$ a parametrização da hipotrocoide, quando $a < b$, é

$$Z_2(\varphi) = (a - b)e^{i\varphi} + hbe^{-i\varphi\left(\frac{a-b}{b}\right)}, h \geq 0$$

que é igual à parametrização da hipotrocoide no primeiro caso.

Analisando as parametrizações obtidas para uma epitrocoide e para uma hipotrocoide podemos dizer que uma trocoide pode ser parametrizada por

$$Z(\varphi) = (a + b)e^{i\varphi} - hbe^{i\varphi\left(\frac{a+b}{b}\right)}$$

onde $a > 0$, $h \geq 0$ e $b \neq 0$. Se $b > 0$ trata-se de uma epitrocoide, e no caso de $b < 0$ trata-se de uma hipotrocoide.

Uma hipotrocoide depende de três parâmetros fixos, a, b, h e um variável, φ , pelo que será representada por $H[\varphi; a, b, h]$.

Em \mathbb{R}^2 , as correspondentes equações paramétricas de $H[\varphi; a, b, h]$ são

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= (a - b)\cos(\varphi) + hb\cos\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right) \\ y(\varphi) &= (a - b)\sin(\varphi) - hb\sin\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right).\end{aligned}$$

3.3.3 Período fundamental

Quando o raio da circunferência fixa é um múltiplo do raio da circunferência móvel, o ponto gerador da trocoide, depois da circunferência ter rolado uma vez em torno da circunferência fixa, retorna à posição inicial e desenha a mesma curva. Mais geralmente se os raios são comensuráveis, o ponto gerador da trocoide, após um certo número de revoluções em torno da circunferência fixa, retorna à sua posição inicial. Neste caso a curva gerada é fechada. Por outro lado, se os raios são incomensuráveis o ponto nunca regressará à mesma posição descrevendo uma série infinita de arcos iguais, mas que nunca coincidirão. Neste caso a curva é transcendente.

Assumiremos que $\frac{a}{b}$ é um número racional por forma a garantir que as trocoides

sejam funções periódicas e portanto curvas fechadas. O seu período fundamental (menor período positivo) corresponde ao número de revoluções do centro da circunferência móvel até completar a curva uma vez.

Teorema 11 Se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ e $m.d.c.(m, n) = 1$ então $H[\varphi; a, b, h]$ e $E[\varphi; a, b, h]$ têm como período fundamental $P = 2\pi n$.

Demonstração.

Com efeito, as coordenadas de um ponto de uma trocoide são uma combinação linear de duas funções sinusoidais, com períodos 2π e $2\pi \frac{b}{a+b}$ ou 2π e $2\pi \frac{b}{a-b}$ consoante a curva é uma epitrocoide ou uma hipotrocoide. Então o período da trocoide é o número P tal que $P = \min(2h_1\pi)$, $h_1 \in \mathbb{N}$ e $2h_1\pi = 2h_2\pi \frac{b}{a \pm b}$, $h_2 \in \mathbb{Z}$.

Trata-se assim de encontrar o menor valor de h_1 tal que

$$\begin{aligned} 2h_1\pi &= 2h_2\pi \frac{b}{a \pm b} \\ h_1 &= h_2 \frac{b}{a \pm b} \end{aligned}$$

Como $a = \frac{m}{n}b$ tem-se

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 \frac{n}{m \pm n} \\ h_1 m &= (h_2 \mp h_1)n \end{aligned}$$

Como $m.d.c.(m, n) = 1$ obtemos $h_1 = n$ e $h_2 \mp h_1 = m$.

O período fundamental é então $2n\pi$.

□

Nota: No caso de $a, b \in \mathbb{N}$ e $m.d.c.(a, b) = 1$ o período fundamental é $2\pi b$.

3.3.4 Dupla geração das trocoides

Cada trocoide pode ser gerada de duas maneiras diferentes por duas circunferências móveis de raios diferentes a rolar sobre duas outras circunferências fixas de raios diferentes, mas concêntricas. O caso particular da dupla geração das epicicloides e das hipocicloides foi demonstrado pela primeira vez por La Hire no seu *Traité des épicycloïdes*, publicado em 1694, redescoberto por Daniel Bernoulli como consta numa carta de 1725 enviada por Nicolas Bernoulli a Goldbach e estabelecido novamente por Euler no volume correspondente a 1781 de *Nova Acta Petropolitana*[9].

Quando uma circunferência de raio b rola no interior de uma circunferência fixa de raio a , com $a > b$, a hipotrocoide gerada por um ponto P ligado à primeira pode ser gerada pelo mesmo ponto ligado a uma outra circunferência móvel a rolar em sentido contrário no interior de outra circunferência fixa concêntrica com a primeira.

Teorema 12 Se $a > b$ então $H[\varphi; a, b, h] = H\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(a-b), \frac{1}{h}\right]$.

Demonstração. A equação paramétrica de $H\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(a-b), \frac{1}{h}\right]$ é

$$\begin{aligned} Z\left(-\frac{a-b}{b}\varphi\right) &= [ah - h(a-b)]e^{i(-\frac{a-b}{b}\varphi)} + \frac{1}{h}h(a-b)e^{-i(-\frac{a-b}{b}\varphi)\left(\frac{ah-h(a-b)}{h(a-b)}\right)} \\ &= hbe^{-i\frac{a-b}{b}\varphi} + (a-b)e^{i(\frac{a-b}{b}\varphi)\left(\frac{b}{a-b}\right)} \\ &= (a-b)e^{i\varphi} + hbe^{-i\varphi\left(\frac{a-b}{b}\right)} \end{aligned}$$

que é a equação paramétrica de $H[\varphi; a, b, h]$.

□

Qualquer epitrocoide pode ser gerada como uma hipotrocoide em que o raio da circunferência móvel é maior do que o da fixa e vice-versa.

Teorema 13

1. $E[\varphi; a, b, h] = H\left[\frac{a+b}{b}\varphi; ah, h(a+b), \frac{1}{h}\right]$
2. Se $b > a$ então $H[\varphi; a, b, h] = E\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(b-a), \frac{1}{h}\right]$

Demonstração.

1. A equação paramétrica de $H\left[\frac{a+b}{b}\varphi; ah, h(a+b), \frac{1}{h}\right]$ é

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right) &= [ah - h(a+b)]e^{i\frac{a+b}{b}\varphi} + \frac{1}{h}h(a+b)e^{-i\frac{a+b}{b}\varphi\left(\frac{ah-h(a+b)}{h(a+b)}\right)} \\ &= -hbe^{i\frac{a+b}{b}\varphi} + (a+b)e^{-i\frac{a+b}{b}\varphi\left(\frac{-b}{a+b}\right)} \\ &= (a+b)e^{i\varphi} - hbe^{i\varphi\left(\frac{a+b}{b}\right)} \end{aligned}$$

que é a equação paramétrica de $E[\varphi; a, b, h]$.

2. A equação de $E\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(b-a), \frac{1}{h}\right]$ é

$$\begin{aligned} Z\left(-\frac{a-b}{b}\varphi\right) &= [ah + h(b-a)]e^{i(-\frac{a-b}{b}\varphi)} - \frac{1}{h}h(b-a)e^{i(-\frac{a-b}{b}\varphi)\left(\frac{ah+h(b-a)}{h(b-a)}\right)} \\ &= hbe^{-i\frac{a-b}{b}\varphi} - (b-a)e^{i(-\frac{a-b}{b}\varphi)\left(\frac{b}{b-a}\right)} \\ &= (a-b)e^{i\varphi} + hbe^{-i\varphi\left(\frac{a-b}{b}\right)} \end{aligned}$$

que é a equação paramétrica de $H[\varphi; a, b, h]$.

□

Os teoremas 12 e 13 garantem que a mesma trocoide pode ser gerada de duas maneiras diferentes às quais correspondem equações diferentes. Embora cada uma das representações da curva produza o mesmo traço o seu período fundamental é diferente, pelo que escolhendo a equação que representa a curva com menor período pode ser poupado tempo computacional.

Para $a > b$, o teorema 12 garante que

$$H_1 = H[\varphi; a, b, h] \text{ e } H_2 = H\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(a-b), \frac{1}{h}\right]$$

têm o mesmo traço embora geradas em sentidos contrários.

Se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ e $m.d.c.(m, n) = 1$ então o período fundamental de H_1 é $2\pi n$. Como

$$\frac{ah}{h(a-b)} = \frac{a}{a-b} = \frac{m}{m-n}$$

e dado que $m.d.c.(m, n) = 1$ implica que $m.d.c.(m, m-n) = 1$, podemos concluir que o período fundamental de H_2 é $2\pi(m-n)$. Logo para representar graficamente a hipotrocoide, se não for relevante o sentido em que a curva é descrita, usando o menor dos valores entre n e $m-n$ pode ser poupado tempo computacional (Fig. 3.6(a)).

Do mesmo modo se $b > a$, o teorema 13 garante que $H = H[\varphi; a, b, h]$ e $E = E\left[-\frac{a-b}{b}\varphi; ah, h(b-a), \frac{1}{h}\right]$ têm o mesmo traço. O período fundamental de H é $2\pi n$ e o período fundamental de E é $2\pi(n-m)$. Mais uma vez usando o menor dos valores entre n e $n-m$ pode ser poupado tempo computacional (Fig. 3.6(b)).

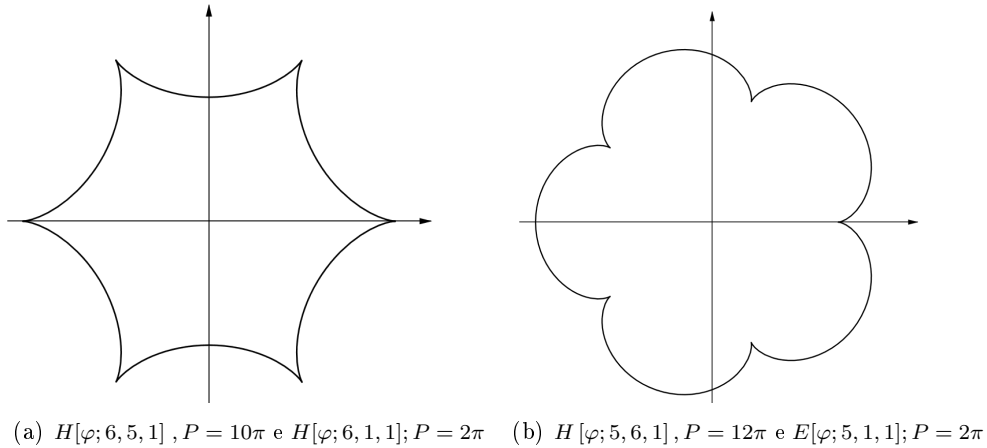


Figura 3.6: Trocoides congruentes

A explicação geométrica da dupla geração das trocoides foi feita por M. Fouret [1], que partindo das circunferências fixa e móvel e do ponto P que gera a trocoide, constrói as novas circunferências fixa e móvel que fazem com que o mesmo ponto P , rigidamente ligado à nova circunferência móvel, descreva a mesma trocoide quando

esta rola na nova circunferência fixa. O que torna a demonstração geométrica atraente é a simplicidade dessa construção, tanto no caso da epitrocoide (Fig. 3.7(a)) como no da hipotrocoide (Fig. 3.7(b)) e será apresentada de seguida.

Seja O o centro da circunferência fixa de raio a , A o centro da circunferência móvel de raio b , C o ponto de contacto destas duas circunferências, P o ponto gerador da curva. Tracemos por P uma paralela a OA e por O uma paralela a AP , e chamemos A' à interseção destas duas retas. C' é a interseção de $A'O$ com CP . Consideremos duas novas circunferências tangentes em C' , uma com centro em A' de raio b' e outra com centro em O de raio a' . Se a circunferência de centro em A' rolar sobre a nova circunferência de centro O , o ponto P rigidamente ligado a ela gerará a mesma curva que descreve com as duas circunferências originais, desde que as circunferências móveis se desloquem no mesmo sentido ou em sentido contrário, consoante se trate de uma epitrocoide ou uma hipotrocoide.

Dado que as demonstrações são idênticas, diferindo apenas nos sinais de alguns termos, serão apresentadas conjuntamente usando o sinal duplo em que o sinal superior se refere ao caso da epitrocoide descrito na Fig. 3.7(a) e o inferior ao caso da hipotrocoide descrito na Fig. 3.7(b).

Seja N o ponto onde AP encontra a circunferência de centro A e I o ponto da circunferência fixa correspondente com o qual N esteve em contacto; N' o ponto de interseção de $A'P$ com a circunferência de centro A' e I' o ponto de interseção de OI com a circunferência de centro O e raio a' . Vejamos que I' é o ponto da circunferência fixa correspondente com o qual N' esteve em contacto, isto, é o arco $\widehat{C'I'}$ é igual ao arco $\widehat{C'N'}$.

Como por hipótese $\widehat{CI} = \widehat{CN}$ tem-se $\widehat{I\hat{O}C} \times a = \widehat{P\hat{A}C} \times b$ ou

$$\frac{\widehat{I\hat{O}C}}{\widehat{P\hat{A}C}} = \frac{b}{a}$$

donde

$$\frac{\widehat{P\hat{A}C} \pm \widehat{I\hat{O}C}}{\widehat{P\hat{A}C}} = \frac{a \pm b}{a} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

Como $\widehat{P\hat{A}C} = \widehat{C\hat{O}C'}$ vem $\widehat{P\hat{A}C} \pm \widehat{I\hat{O}C} = \widehat{C\hat{O}C'} \pm \widehat{I'\hat{O}C} = \widehat{I'\hat{O}C'}$. Além disso $\widehat{P\hat{A}C} = \widehat{P\hat{A}'C'}$ e $\overline{OA} = \overline{A'P}$ e portanto

$$\frac{\widehat{I'\hat{O}C'}}{\widehat{P\hat{A}'C'}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{OC}}$$

Da semelhança dos triângulos $A'PC'$ e OCC' obtemos

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}}$$

e portanto

$$\frac{\widehat{I'\hat{O}C'}}{\widehat{P\hat{A}'C'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}} = \frac{b'}{a'}$$

donde

$$I'\widehat{OC'} \times a' = P\widehat{A'C'} \times b'$$

o que traduz a igualdade entre os arcos $\widehat{C'I'}$ e $\widehat{C'N'}$.

Vimos até agora que se fizermos rolar as circunferências móveis sobre as fixas, no mesmo sentido ou em sentido contrário consoante a curva inicial é uma epitrocoide ou uma hipotrocoide, os pontos N e N' irão coincidir respetivamente com I e I' , e o ponto P quer seja transportado por uma ou outra das circunferências móveis, encontrar-se-á nesse momento a reta II' . Nos dois casos o ponto P ocupa a mesma posição sobre esta reta, uma vez que

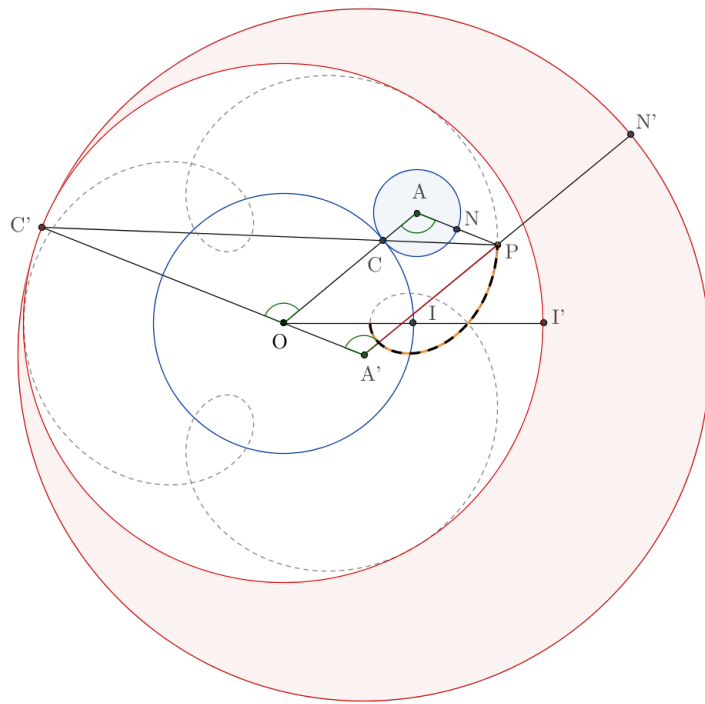
$$\overline{PN'} \mp \overline{PN} = \overline{II'}$$

Com efeito, reconhece-se facilmente na Fig. 3.7 que

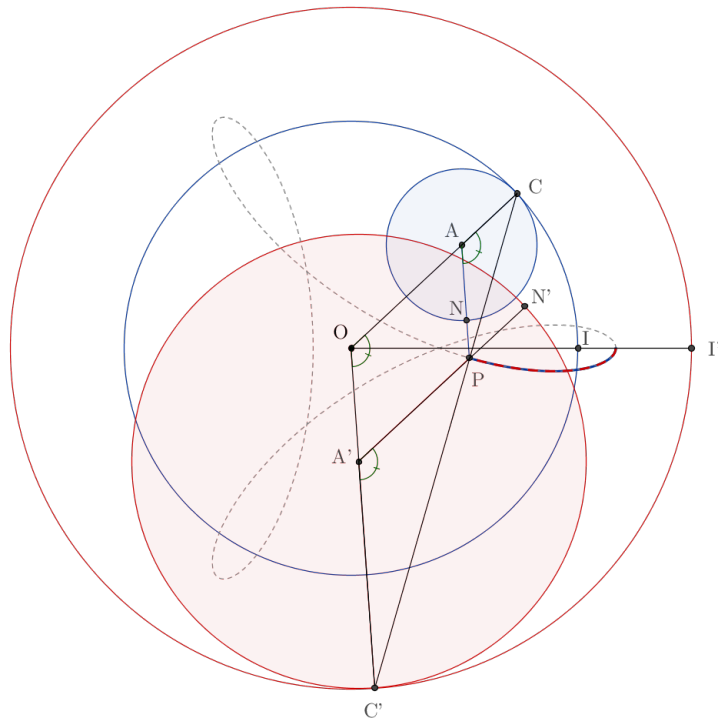
$$\begin{aligned}\overline{PN} &= \overline{OA'} - b \\ \overline{PN'} &= b' - \overline{OA}\end{aligned}$$

Como $\overline{OA} = a \pm b$ e $\overline{OA'} = \pm(b' - a')$ tem-se

$$\begin{aligned}\overline{PN'} - \overline{PN} &= (b' - a - b) - (b' - a' - b) = a' - a = \overline{II'} \\ \overline{PN'} + \overline{PN} &= (b' - a + b) + (-b' + a' - b) = a' - a = \overline{II'}\end{aligned}$$



(a) Epitrocoide



(b) Hipotrocoide

Figura 3.7: Dupla geração das trocoides

4

Aplicações

Neste capítulo veremos dois problemas cuja origem remonta ao século XVII. O primeiro, a construção do pêndulo isócrona, foi resolvido por Huygens em 1659, como parte integrante da construção do seu relógio de pêndulo. O segundo, consiste na determinação do perfil dos dentes das rodas dentadas de uma engrenagem de eixos paralelos em que se pretende que uma roda transmita velocidade constante à outra. Foi tratado por La Hire [4] no seu *Un traité des épicycloïdes et de leur usage dans les mécaniques*, publicado em 1694, onde refere a importância do estudo da forma dos dentes das rodas dentadas para um bom funcionamento das engrenagens e apresenta exemplos de engrenagens com perfil cicloidal, que surgem como uma aplicação do estudo das epicicloides. No prefácio da sua obra refere mesmo “ j’ai donc cru qu’il fallait examiner avec un très grand soin, quelle devait être la figure des dents des roues puisque ce n’est que par ces dents que les roues agissent l’une sur l’autre, et que c’est par leur moyen qu’on peut ménager la force mouvante pour en tirer tout l’avantage possible. Il y a environ vingt ans que j’avais commencée à travailler à cet ouvrage et j’avais déterminé d’une manière très simple, que les dents des roues devoient avoir la figure d’une cycloïde qui a pour base un cercle, ce que l’on appelle épicycloïde...”.

O processo de aplicação da matemática nem sempre consiste em pegar numa sua teoria e aplicá-la num determinado domínio ou problema. O que acontece muitas vezes é não existir a matemática requerida e nesse caso nova matemática emerge como resultado da aplicação. Um exemplo é a criação da teoria das evolutas de Huygens que surge na sequência dos seus estudos sobre o pêndulo e aparece no tratado *Horologium Oscillatorium*(1673)(O relógio de pêndulo). O problema da determinação da longitude, associado à medição exata do tempo, fez com que Huygens se interessasse pela construção e aperfeiçoamento dos relógios levando-o à construção do relógio de pêndulo. O pêndulo circular, não sendo isócrona, conduziu-o ao problema da tautócrona, que consiste em encontrar a curva ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e apenas sujeito à força da gravidade, chega ao ponto mais baixo sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida. Huygens descobre e demonstra por processos geométricos que a cicloide invertida é tautócrona, mas fica com um novo problema. Como deve ser construído o pêndulo para que a sua massa

descreva uma cicloide? A resposta seria dada resolvendo outra questão matemática, encontrar a curva cuja tangente em cada ponto é normal a uma dada cicloide, isto é, encontrar a evoluta da cicloide. Mais uma vez por processos geométricos Huygens consegue demonstrar que a evoluta da cicloide é outra cicloide, sendo-lhe finalmente possível idealizar um ajustamento mecânico para contruir o pêndulo isócrono. A partir da invenção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz, este último discípulo de Huygens, os problemas de mecânica começam a ser resolvidos usando equações diferenciais. Em 1690, Jacob Bernoulli, demonstrou novamente que a cicloide é tautócrona estabelecendo uma equação diferencial para essa curva e resolvendo-a.

Neste capítulo faremos a resolução analítica do problema da tautócrona e a determinação da evoluta da cicloide invertida, os dois resultados que permitiram a Huygens a construção do relógio de pêndulo isócrono e veremos como as epicicloides e hipocicloides podem ser utilizadas no perfil dos dentes de rodas dentadas de modo a assegurar ação conjugada, isto é, que a razão das velocidades angulares das duas rodas da engrenagem seja constante.

4.1 Relógio de pêndulo de Huygens

No século XVII, tornou-se imperioso encontrar um método para medir a longitude, que permitisse nas grandes viagens marítimas, sem referências terrestres, identificar a localização atual. Este problema estava intimamente ligado ao da determinação precisa do tempo. Em teoria, como 15° de longitude correspondem a uma hora, se fosse possível manter a bordo um relógio acertado pela hora de um local de longitude conhecida, ao marcar nesse relógio o meio-dia local, a diferença entre as horas locais permitiria determinar a diferença das suas longitudes e consequentemente determinar a longitude do local. Contudo, na época os melhores relógios atrasavam-se ou adiantavam-se vários minutos por dia, impossibilitando a manutenção do tempo de referência nos navios.

Galileu(1564-1642) foi o primeiro a desenhar um relógio regulado por um pêndulo esperando com a sua utilização obter a precisão na medição do tempo que faltava aos relógios da época. Do estudo que fez sobre o pêndulo simples acreditou que este seria isócrono, isto é, o tempo de uma oscilação completa seria independente da amplitude da mesma. Consequentemente as variações de amplitude provocadas quer pela resistência do ar quer pelo impulso para manter o movimento pendular, não alterariam o seu período pelo que este poderia ser usado como uma medida constante do tempo. Embora tenha deixado o seu projeto por finalizar e não tenha construído nenhum relógio de pêndulo deixou a ideia para a sua construção.

Retomando a ideia de Galileu, Huygens(1629-95) construiu o primeiro relógio de pêndulo em 1657, e desde então trabalhou no desenho e desenvolvimento de relógios, tentando criar o relógio que pudesse ser utilizado como cronómetro marítimo. Em 1657, ciente que o pêndulo simples ao oscilar descreve um arco de circunferência que não é isócrono, embora o seja aproximadamente para pequenas amplitudes, questionou-se se existiria uma curva ao longo da qual o movimento do pêndulo fosse independente da

amplitude. Huygens tentou encontrar essa curva empiricamente colocando o pêndulo entre duas placas metálicas que limitavam o seu balanço e que tinham como função acelerar o movimento à medida que o pêndulo se afastava da vertical. Quando o pêndulo oscilasse com amplitudes maiores, as placas produziriam um encurtamento do fio, correspondendo a esse encurtamento um aumento de velocidade, de modo a que o tempo gasto a descrever esse arco de maior amplitude tornar-se-ia igual ao tempo necessário a percorrer um arco de pequena amplitude sem qualquer restrição.

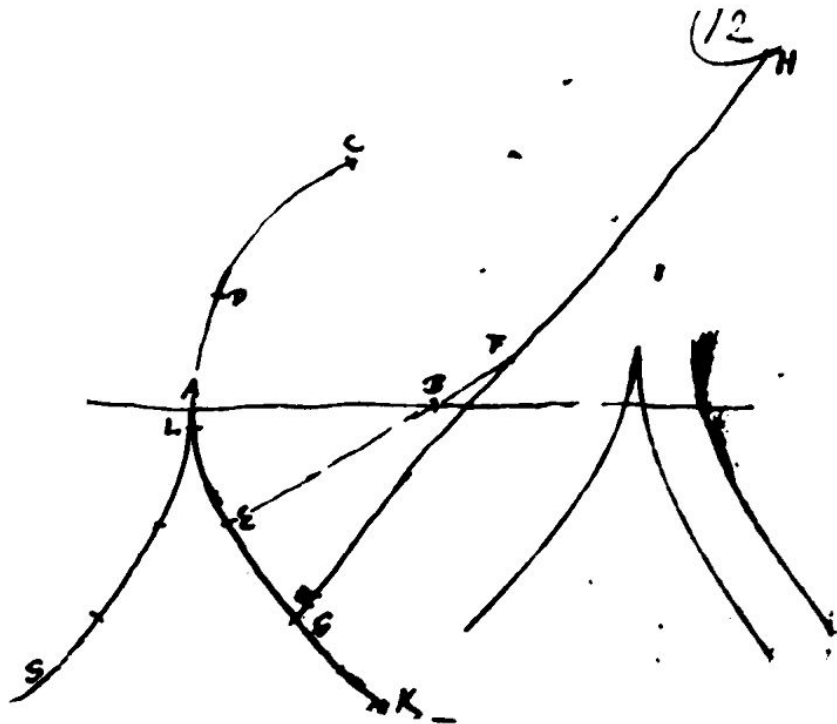


Figura 4.1: Manuscrito com as restrições do pêndulo de 1657

Embora Huygens não soubesse a forma a dar a essas placas para que o pêndulo descrevesse uma trajetória isócrona, e a sua determinação tenha sido empírica, ele tem uma justificação teórica. Na figura 4.1, a trajetória do pêndulo representada no manuscrito é constituída por arcos circulares GK , EG e AE cujos centros são H , F e B e cujos raios vão sendo cada vez menores. Estes pontos actuam como centros de rotação e em qualquer instante o fio é perpendicular ao arco que descreve. Cada ponto da placa metálica é visto como um centro de rotação instantâneo ou centro de curvatura isto é as placas constituem o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva descrita pela massa do pêndulo, ou seja a sua evoluta. Quando o fio oscila enrolando e desenrolando ao longo de uma placa, a parte livre do fio é mantida esticada, sendo normal à trajetória do pêndulo e tangente à superfície da placa no ponto de contacto. Huygens descobriu a propriedade que relaciona a curva descrita pelo pêndulo com a curva das placas metálicas. A normal à trajetória pendular deverá ser tangente à curva das placas. Em 1656, ele não conhecia nenhuma das curvas. Em Dezembro de 1659, Huygens

demonstrou que a curva tautócrona era uma cicloide e a sua evoluta era outra cicloide.

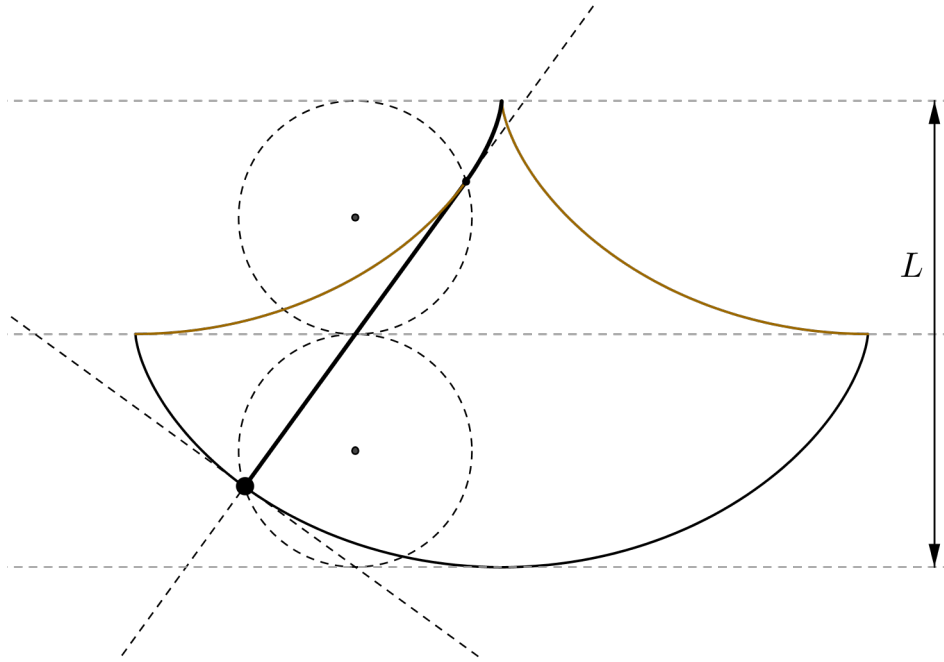


Figura 4.2: Pêndulo isócrono

Para construir o pêndulo isócrono (Fig. 4.2), que teoricamente marca o tempo certo¹, basta determinar o comprimento do fio a partir da fórmula do período, $L = \frac{t^2 g}{4\pi^2}$, moldar duas placas com a forma da cicloide gerada por uma circunferência de diâmetro $\frac{L}{2}$ e pendurar o pêndulo entre elas. A construção do pêndulo isócrono envolveu a resolução de dois problemas:

1. encontrar a curva tautócrona, ao longo da qual a massa do pêndulo se deve mover
2. encontrar um modo de suspender o pêndulo garantindo que este se mova ao longo da curva tautócrona, isto é a determinação da sua evoluta

4.1.1 O problema da tautócrona

O problema da tautócrona, consiste em determinar a curva plana ao longo da qual um corpo, sem velocidade inicial e sujeito somente à força da gravidade, desliza até ao ponto mais baixo da curva sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida.

Considere-se um arame com a forma de uma curva suave que representa meia oscilação do pêndulo, e deixe-se uma conta partindo do repouso na posição (x_0, y_0) , escorregar ao longo do arame até ao ponto mais baixo, que assumiremos como a origem $(0, 0)$. Se a conta escorrega sem fricção então pelo princípio de conservação da energia mecânica, a energia cinética em qualquer instante será igual à variação da energia

¹Na prática a utilização das placas foi a origem de vários problemas que alteravam a precisão do relógio pelo que a solução adotada foi manter o pêndulo com pequenas oscilações.

potencial,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y)$$

onde m representa a massa da conta, $v = -\frac{ds}{dt}$ e s o comprimento de arco entre a origem e o ponto (x, y) . Da equação anterior resulta

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Considerando $s = f(y)$, o tempo de descida desde a altura y_0 até à origem é dado por

$$\begin{aligned} T(y_0) &= \int_{y_0}^0 -\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy \\ &= \int_0^{y_0} \frac{f'(y)}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = y_0 z$, obtém-se

$$\begin{aligned} T(y_0) &= \int_0^1 \frac{f'(y_0 z)}{\sqrt{2g(y_0 - y_0 z)}} y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{f'(y_0 z)}{\sqrt{(1-z)}\sqrt{y_0}} y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{f'(y_0 z) \sqrt{y_0}}{\sqrt{(1-z)}} dz \end{aligned}$$

Para que T seja constante, deverá ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y_0} (f'(y_0 z) \sqrt{y_0}) = 0$$

o que conduz à equação diferencial

$$2f''(y)y + f'(y) = 0 \quad \text{para } 0 < y < y_0$$

Substituindo f' por g , obtemos uma equação de primeira ordem homogénea

$$2g'(y)y + g(y) = 0$$

ou dividindo ambos os membros por $2y$,

$$g'(y) + \frac{1}{2y}g(y) = 0$$

Esta equação é separável e portanto tem como solução geral

$$g(y) = ce^{-\frac{1}{2}\ln(y)} = \frac{c}{\sqrt{y}}$$

onde c é uma constante positiva pois g terá de ser positiva dado que f é uma função crescente.

Por outro lado da igualdade $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ resulta usando a regra da cadeia

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

donde

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{(f'(y))^2 - 1}$$

e integrando ambos os membros em ordem a y

$$x = \pm \int \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{y}}\right)^2 - 1} dy = \pm \int \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} dy$$

Para calcular o integral vamos fazer a substituição $y = c^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right) = c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ onde $0 \leq \theta \leq \pi$. Então

$$\begin{aligned} x &= \pm \int \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} dy \\ &= \pm \int \sqrt{\frac{c^2 - c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} c^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \pm c^2 \int \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \pm c^2 \int \frac{1 + \cos \theta}{2} d\theta \\ &= \pm \frac{c^2}{2} \int (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \pm \frac{c^2}{2} (\theta + \sin \theta) + k \end{aligned}$$

onde k é a constante de integração.

Logo a curva que procuramos é parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{2} (\theta + \sin \theta) + k \\ y &= \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Para determinar k basta ter em conta que esta curva deve passar na origem. Para $y = 0$ resulta que $\cos \theta = 1$ logo $\theta = 0$. Portanto para que se tenha $x = 0$ deve ter-se $k = 0$.

A constante c é determinada exigindo que a curva passe em $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, isto é resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{c^2}{2} (\theta_0 + \sin \theta_0) \\ y_0 &= \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

em ordem a $c > 0$ e θ_0 .

Este sistema pode ser resolvido em ordem a c e $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, em função de x_0 e y_0 se e só se $0 < \left| \frac{y_0}{x_0} \right| \leq \frac{2}{\pi}$. Verifica-se facilmente que assim é uma vez que a função h definida por $h(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta + \sin \theta}$ com $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ é estritamente crescente, logo injetiva, e tem por contradomínio $[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}] \setminus \{0\}$.

A curva encontrada é descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{2} (\theta + \sin \theta) \\ y &= \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

com $\theta \in [-\pi, \pi]$ e facilmente se verifica, fazendo $a = \frac{c^2}{2}$ e $\theta = \frac{t}{a}$, que correspondem à versão real da equação 3.2.1. Logo a curva é parte da cicloide invertida traçada por um ponto de uma circunferência de raio $\frac{c^2}{2}$ que rola sem deslizar por baixo e ao longo da reta $y = c^2$. (Fig. 4.3)

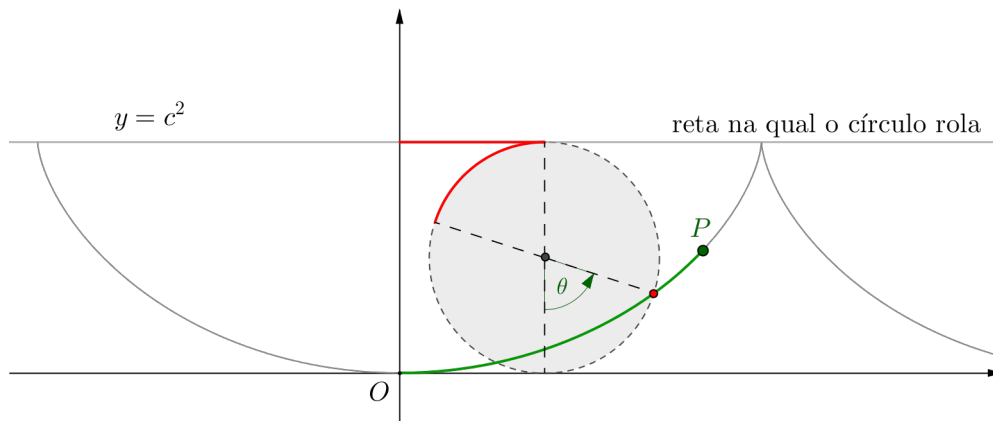


Figura 4.3: A curva que liga O a P é parte de uma cicloide invertida

Como se explica que o tempo gasto pela conta a descer ao longo do arame com a forma de um arco de cicloide até ao ponto mais baixo seja sempre o mesmo independentemente do ponto onde inicia a descida? A explicação física reside no facto da força

tangencial que atua na conta ser diretamente proporcional ao comprimento do arco da cicloide entre a conta e a origem (considerada o ponto mais baixo da cicloide), o que quer dizer que o movimento da conta é um movimento harmónico simples.

Um arco de cicloide invertida é parametrizado por

$$\begin{aligned}x &= r(\theta + \sin \theta) \\ y &= r(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

com $r > 0$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$. Para estudar o movimento da conta ao longo deste arco, comecemos por calcular a distância que esta percorre para a direita ou para a esquerda da origem O , isto é, o comprimento de arco, s , desde a origem até um ponto arbitrário P . Então

$$\begin{aligned}s &= \int_0^\theta \sqrt{[r(1 + \cos u)]^2 + [r \sin u]^2} du \\ &= \int_0^\theta \sqrt{2r^2(1 + \cos u)} du \\ &= \int_0^\theta \sqrt{4r^2 \cos^2 \frac{u}{2}} du \\ &= \int_0^\theta 2r \cos \frac{u}{2} du \\ &= 4r \sin \frac{u}{2} \Big|_0^\theta \\ &= 4r \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Note-se que se P estiver à esquerda de O então $\theta < 0$ e nesse caso s será negativo.

Como a conta está sujeita apenas à força da gravidade, a causa do movimento ao longo do arame é a componente tangencial desta força (Fig. 4.4) dada por

$$-mg \sin \alpha$$

onde α representa a inclinação da tangente à cicloide no ponto P . Como $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$ podemos relacionar α com θ . De facto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r \sin \theta}{r + r \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

Concluimos assim que $\tan \alpha = \tan \frac{\theta}{2}$ ou $\alpha = \frac{\theta}{2}$ e a componente tangencial da força pode ser escrita como $-mg \sin \frac{\theta}{2}$. Pela segunda lei de Newton

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \frac{\theta}{2}$$

Finalmente, usando o comprimento de arco $s = 4r \sin \frac{\theta}{2}$ obtemos a equação

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4r}s$$

cuja solução como função do tempo é uma função sinusoidal. Será

$$s(t) = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4r}}t$$

se no instante inicial a distância entre a conta e a origem, medida ao longo da curva, é dada por s_0 e a velocidade inicial é nula. O período é independente da amplitude e é dado por $T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ pelo que o tempo de descida de P até O será dado por $\frac{1}{4}T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

A conta executa um movimento harmónico simples, oscilando em torno da origem que corresponde à posição de equilíbrio. Se a conta for colocada na origem, a força tangencial será nula e portanto não haverá movimento. Mas se for colocada noutro ponto qualquer do arame a força tangencial será diretamente proporcional à sua distância à origem. Assim se considerarmos duas posições diferentes cujas distâncias à origem sejam dadas por s_0 e $s_1 = ks_0$ (Fig. 4.5), a força tangencial na segunda posição será k vezes a força tangencial que atua sobre a conta na primeira, o que implica que a aceleração e a velocidade serão também multiplicadas por k , logo a conta percorrerá a

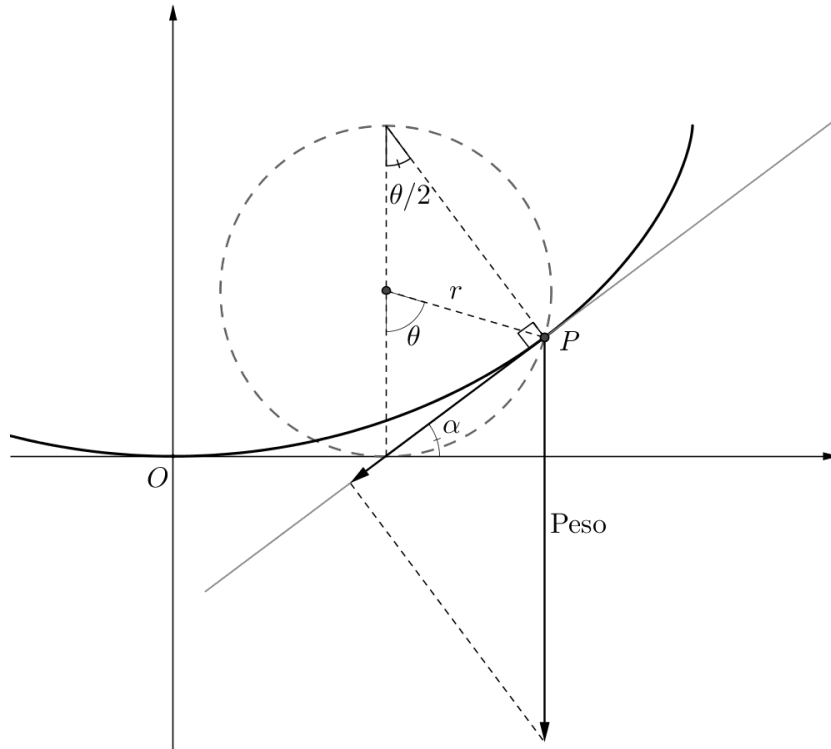


Figura 4.4: Componente tangencial do peso no ponto P

distância ks_0 no mesmo intervalo de tempo em que percorreria s_0 a partir da primeira posição.

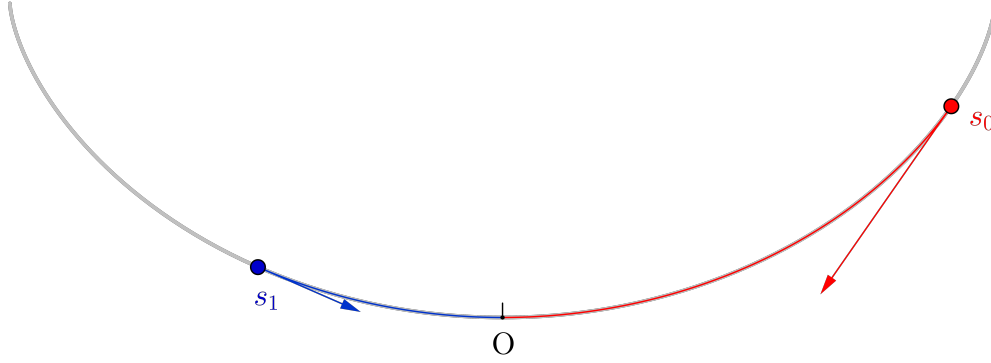


Figura 4.5: A força tangencial é diretamente proporcional ao comprimento do arco

4.1.2 Determinação da evoluta

Dada a cicloide invertida parametrizada por $\alpha(\theta) = (r\theta + r \sin \theta, r - r \cos \theta)$ temos

$$\begin{aligned}\alpha'(\theta) &= (r + r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \alpha''(\theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta)\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}k(\theta) &= \frac{(r + r \cos \theta)(r \cos \theta) - (r \sin \theta)(-r \sin \theta)}{r^3 ((1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} r \sqrt{1 + \cos \theta}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_*(\theta) &= \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta) \|\alpha'(\theta)\|} (-y'(\theta), x'(\theta)) \\ &= (r\theta + r \sin \theta, r - r \cos \theta) + 2(-r \sin \theta, r + r \cos \theta) \\ &= (r\theta - r \sin \theta, 3r + r \cos \theta) \\ &= (r(\theta - \pi) + r \sin(\theta - \pi) + r\pi, r - r \cos(\theta - \pi) + 2r) \\ &= \alpha(\theta - \pi) + (r\pi, 2r)\end{aligned}$$

A última linha mostra que a evoluta de uma cicloide invertida é a mesma curva trasladada para outra posição (Fig. 4.6).

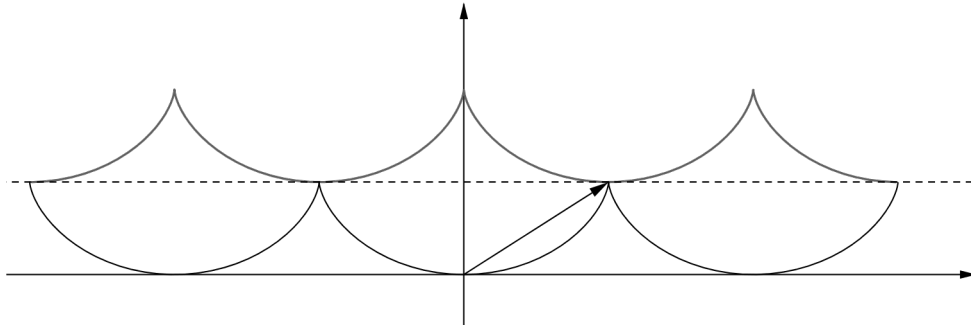


Figura 4.6: Cicloide invertida e a sua evoluta

4.2 Perfil dos dentes de rodas dentadas

A transmissão de movimento de rotação entre dois eixos, sejam paralelos, concorrentes ou não coplanares, pode ser materializada por engrenagens, isto é, pares de rodas dentadas cada uma delas fixa ao respetivo eixo. Pretende-se que a roda mandante, a rodar com velocidade angular constante, transmita um movimento uniforme à roda mandada garantindo uma boa precisão dos movimentos de rotação de modo a evitar vibrações que produzem ruído e desgaste rápido. Para que seja possível obter ação conjugada é necessário, entre outros fatores, a correta definição da geometria do perfil dos dentes das rodas dentadas. Veremos a geometria e as condições fundamentais de transmissão do movimento entre eixos paralelos com engrenagens cilíndricas retas, construídas a partir de cilindros nos quais são gerados os dentes paralelos ao eixos. O perfil cicloidal e o perfil em involuta de circunferência são os perfis tradicionalmente utilizados para obter ação conjugada. Faremos o estudo do perfil cicloidal.

4.2.1 Lei do Engrenamento

Imaginemos inicialmente que a transmissão é feita por dois cilindros pressionados um contra o outro. Se a força tangencial exercida pelo cilindro que roda com velocidade angular constante não exceder a força de atrito entre as duas superfícies, os cilindros rolam sem deslizar um no outro e a razão de transmissão (razão entre as velocidades angulares) é constante [6]. Mas se a força tangencial exceder a força de atrito, vai haver deslizamento entre as duas superfícies alterando-se a razão de transmissão. Para evitar este deslizamento são gerados na superfície de ambos os cilindros os dentes, surgindo as rodas dentadas. Uma roda movimenta a outra por pressão entre os dentes que entram sucessivamente em contacto. As superfícies cilíndricas são chamadas superfícies primitivas e o perfil dos dentes deve ser definido de tal forma que estes transmitam o mesmo movimento que seria transmitido por fricção entre os cilindros primitivos. Quando numa engrenagem um par de dentes atua um contra o outro transmitindo movimento de rotação mantendo a razão entre as velocidades angulares constante, os dentes estão em ação conjugada e os seus perfis são curvas conjugadas.

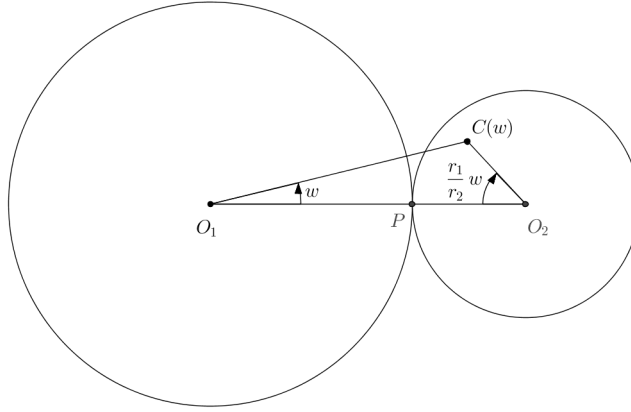


Figura 4.7: Circunferências primitivas de duas rodas dentadas sendo C o ponto de contacto entre um par de dentes em ação.

As secções de uma engrenagem cilíndrica obtidas por planos perpendiculares aos eixos são iguais pelo que o estudo da transmissão do movimento pode ser feito num plano. Na representação plana da engrenagem (Fig. 4.7), as superfícies primitivas reduzem-se a circunferências denominadas circunferências primitivas e o seu ponto de contacto P é chamado ponto primitivo. Estas circunferências situadas algures entre o topo e a base dos dentes das rodas dentadas, são linhas imaginárias que rolam sem deslizar uma na outra. Dada a ausência de deslizamento, as velocidades das duas circunferências primitivas no ponto de contacto P são iguais, donde resulta que $w_1 r_1 = w_2 r_2$ onde w_1 , w_2 , r_1 e r_2 são as velocidades angulares e os raios das circunferências primitivas correspondentes. Portanto, a razão das velocidades angulares é constante dada por $\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1}$ concluindo-se que as velocidades angulares são inversamente proporcionais aos raios primitivos. Assim, numa engrenagem pretende-se que a roda mandante, a rodar com velocidade angular constante w em torno do eixo O_1 , transmita pela ação dos dentes em contacto, à outra roda um movimento de rotação em torno do seu eixo O_2 com velocidade $\frac{r_1}{r_2} w$.

Para assegurar uma ação conjugada o perfil dos dentes deve satisfazer a chamada Lei do Engrenamento [5, 6]. Esta lei estabelece que os perfis dos dentes devem ter uma forma tal que a normal comum no ponto de contacto deverá passar sempre no ponto primitivo, independentemente da posição do ponto de contacto.

Consideremos um par de rodas dentadas R_1 e R_2 em ação conjugada. R_1 roda em torno de O_1 com velocidade angular w_1 e transmite o movimento de rotação à roda R_2 que roda em torno de O_2 com velocidade angular w_2 . Num determinado instante um par de dentes estão em contacto no ponto C . As curvas a e b representam, respetivamente, parte do perfil do dente de R_1 e R_2 . As retas t e n são a tangente e a normal comuns a a e b no ponto C . O ponto C em cada roda executa um movimento circular uniforme, logo a velocidade linear de C em R_1 e em R_2 é dada respetivamente por

$$V_1 = \overline{CM_1} = \overline{O_1C} \cdot w_1 \quad \text{e} \quad V_2 = \overline{CM_2} = \overline{O_2C} \cdot w_2$$

onde M_1 e M_2 são tais que $\vec{V}_1 = \overrightarrow{CM_1}$ e $\vec{V}_2 = \overrightarrow{CM_2}$. Donde resulta

$$w_1 = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{O_1C}} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{\overline{CM_2}}{\overline{O_2C}}$$

e portanto

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{O_1C}} \cdot \frac{\overline{O_2C}}{\overline{CM_2}}$$

Embora as velocidades lineares dos dois perfis no ponto C , \vec{V}_1 e \vec{V}_2 , sejam diferentes as suas componentes ao longo da normal n terão de ser iguais por forma a manter o contacto. Da semelhança dos triângulos O_1CR e CKM_1 (critério AAA), temos

$$\frac{\overline{CM_1}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{O_1R}}$$

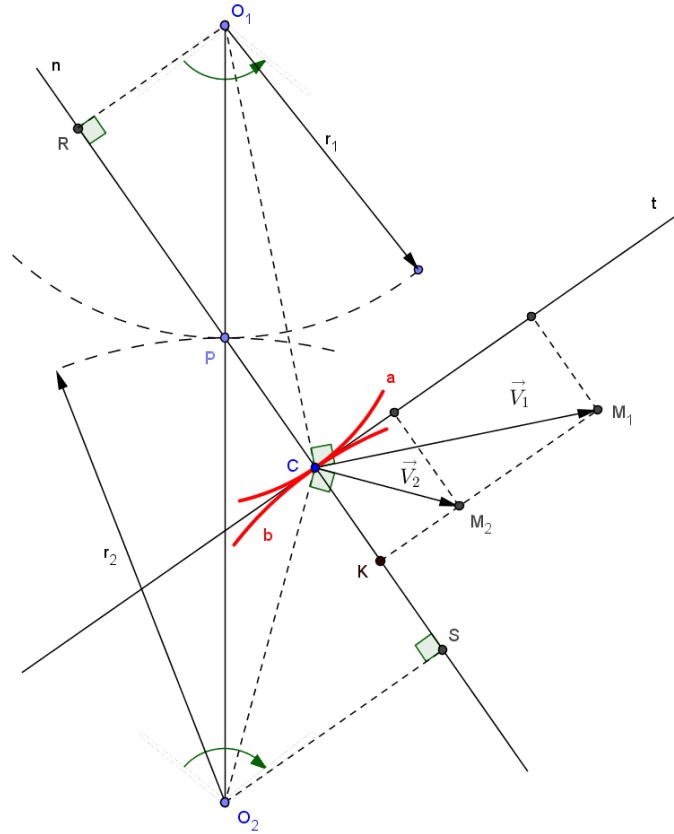


Figura 4.8: Lei do Engrenamento

Da semelhança dos triângulos O_2CS e CKM_2 (critério AAA), temos

$$\frac{\overline{O_2C}}{\overline{CM_2}} = \frac{\overline{O_2S}}{\overline{CK}}$$

Portanto,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{O_1C}} \cdot \frac{\overline{O_2C}}{\overline{CM_2}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{O_1R}} \cdot \frac{\overline{O_2S}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{O_2S}}{\overline{O_1R}}$$

Ainda da semelhança dos triângulos O_1PR e O_2PS , temos

$$\frac{\overline{O_2S}}{\overline{O_1R}} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}}$$

donde

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\overline{O_2S}}{\overline{O_1R}} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Podemos então concluir que a razão das velocidades angulares é igual à razão inversa dos comprimentos dos segmentos em que a normal comum no ponto de contacto corta a linha dos centros. Para que a razão das velocidades angulares seja constante, a normal comum aos perfis no ponto de contacto deve interseccionar a linha dos centros sempre no mesmo ponto P . Este ponto corresponde ao ponto de contacto das circunferências primitivas.

4.2.2 Perfil cicloidal

Embora seja possível construir graficamente um perfil conjugado a partir de um perfil dado utilizando a Lei do Engrenamento, as curvas utilizadas tradicionalmente para o perfil dos dentes são a epicicloide, a hipocicloide e a involuta da circunferência.

O perfil cicloidal é constituído por dois arcos de curvas distintas. O perfil do topo do dente, exterior à circunferência primitiva, corresponde a um arco de uma epicicloide e o perfil da base, interior à circunferência primitiva, corresponde a um arco de uma hipocicloide. Estes arcos fazem parte duma epicicloide e hipocicloide geradas por circunferências, em geral de raios diferentes, a rolar na circunferência primitiva. Os dois arcos são unidos sobre a circunferência primitiva (Fig. 4.9). Quando um par de dentes entra em ação a base do dente da roda transmissora entra em contacto com o topo do outro dente. O ponto de contacto desliza ao longo do perfil e o topo do primeiro dente vai estar em contacto com a base do segundo. Portanto o perfil da base de um dente e o perfil do topo do outro têm de ser curvas conjugadas. Para que tal aconteça no perfil cicloidal basta trocar os papéis às circunferências geradoras, isto é, numa engrenagem cicloidal com ação conjugada, o perfil da base do dente da roda R_1 e o perfil do topo do dente da roda R_2 devem ser gerados por circunferências com o mesmo raio a rolar, respetivamente, no interior da circunferência primitiva de R_1 no exterior da circunferência primitiva de R_2 .

Para demonstrar que assim é, consideremos as circunferências primitivas, C_1 e C_2 ,

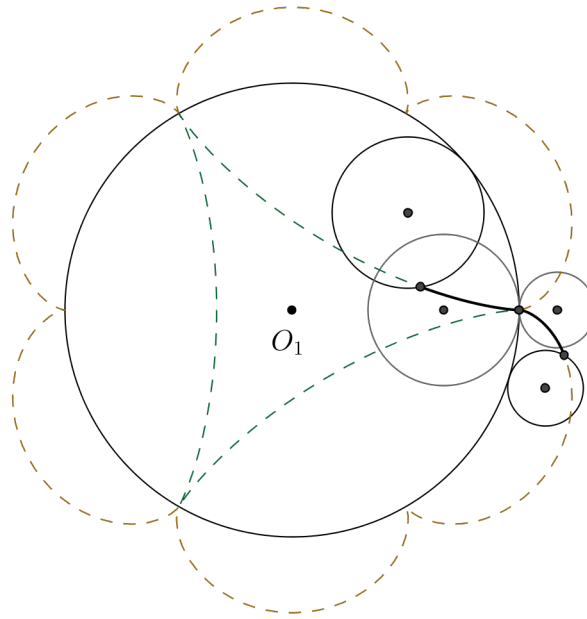


Figura 4.9: Construção do perfil cicloidial

de duas rodas dentadas, e uma circunferência auxiliar C de raio r no interior de C_1 e tangente com C_1 e C_2 no ponto primitivo P . Se uma dessas circunferências roda em torno do seu centro, força as outras duas a rodar em torno dos respectivos centros e as três vão descrever arcos de igual comprimento a partir de P , tal como aconteceria se as circunferências primitivas permanecessem imóveis e a circunferência de raio r rolasse sobre elas.

Quando a circunferência de raio r rola no interior de C_1 o ponto P descreve uma hipocicloide. Se fixarmos agora a circunferência auxiliar C e rodarmos C_1 juntamente com a hipocicloide, em torno de O_1 com velocidade constante w , a hipocicloide intersecta a circunferência fixa num ponto K que se move ao longo da circunferência C com velocidade angular constante $\frac{r_1}{r}w$. Quando a circunferência de raio r rola no exterior de C_2 o ponto P descreve uma epicicloide. Novamente, se fixarmos a circunferência auxiliar C e rodarmos C_2 juntamente com a epicicloide, em torno de O_2 com velocidade angular constante $-\frac{r_1}{r_2}w$, a epicicloide intersecta a circunferência fixa num ponto que se move ao longo desta com velocidade angular constante igual a $\frac{r_1}{r}w$. Vemos deste modo que se rodarmos as circunferências C_1 e C_2 simultaneamente, a hipocicloide e a epicicloide terão sempre o ponto K em comum, que descreve a circunferência fixa (Fig. 4.10). Note-se que os dentes fazem contacto sempre sobre as circunferências geradoras do perfil, logo a curva de contacto é constituída por uma combinação de dois arcos dessas circunferências.

Por outro lado, quando uma circunferência móvel gera uma hipocicloide ou epicicloide a rolar numa circunferência fixa, o ponto de contacto de ambas é um centro instantâneo de rotação para a circunferência móvel, logo a reta que une o ponto gerador

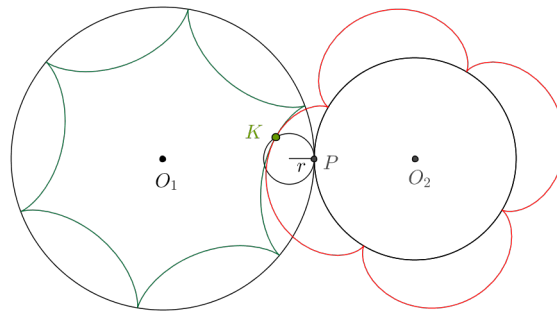


Figura 4.10: Ponto de contacto da hipocicloide com a epicloide

da curva com o ponto de contacto é normal à curva nesse ponto. Concluimos assim que a hipocicloide e epicloide geradas pela circunferência de raio r , para além de terem o ponto K em comum são tangentes nesse ponto e a normal comum passa no ponto primitivo e portanto são curvas conjugadas.

Note-se que, se mantivermos fixa a circunferência primitiva c_2 e deixarmos rolar c_1 juntamente com a hipocicloide em c_2 , a epicloide é a envolvente das posições sucessivas da hipocicloide (Fig. 4.11).

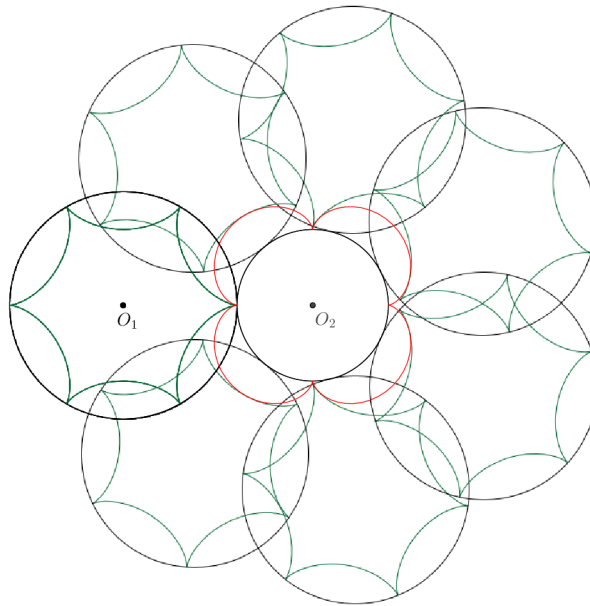


Figura 4.11: Epicloide como a envolvente das posições sucessivas da hipocicloide

5

Animações com o Geogebra

"Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork. You want to find out what the facts are, and what you do is in that respect similar to what a laboratory technician does, but it is different in the degree of precision and information."

Paul Halmos, I want to be a Mathematician

Ao longo do trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores o GeoGebra constituiu um recurso metodológico importante. As suas capacidades de modelação dinâmica, permitindo a transformação quase contínua de configurações mantendo um conjunto de restrições, e a possibilidade de testar propriedades, facilitaram a experimentação matemática, contribuindo para a clarificação de conceitos e para a compreensão de resultados. Como consequência da utilização do GeoGebra ficaram algumas animações geométricas, que permitem visualizar e apreender de forma rápida, alguns dos conteúdos abordados tornando-os acessíveis a todos. É claro que estas animações, por si só, não explicam o porquê dos resultados mas fornecem evidências que poderão despertar curiosidade e fornecer motivação para explorações matemáticas.

As legendas das figuras constituem um *link* para as correspondentes animações.

5.1 Curvatura e circunferência osculadora

Para uma curva fixa, esta animação permite visualizar a circunferência osculadora e o centro de curvatura, num ponto de curvatura não nula P_0 . A posição de P_0 pode ser alterada movendo o seletor P_0 , percebendo-se que a circunferência osculadora está sempre do lado côncavo da curva. Quando se faz variar a posição de P_0 ao longo da curva é assinalado no gráfico da função curvatura o valor correspondente

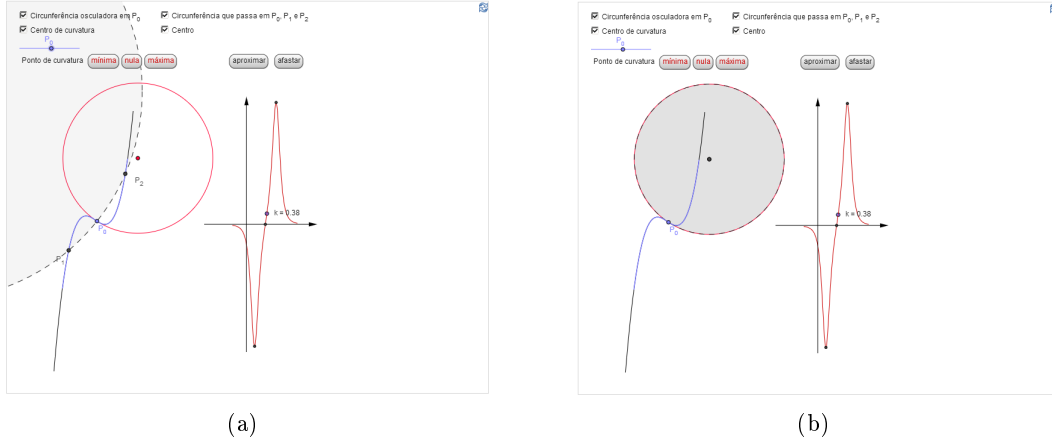


Figura 5.1: Instantâneos de *Curvatura e circunferência osculadora*

da curvatura ficando perceptível que o raio de curvatura varia na razão inversa do valor absoluto da curvatura. O ponto P_0 pode ser posicionado diretamente nos pontos de curvatura mínima, nula ou máxima, carregando nos botões correspondentes. O ponto de curvatura nula é assinalado como um ponto onde não existe circunferência osculadora. Para qualquer posição de P_0 , a circunferência osculadora pode ser vista como a posição limite duma sucessão de circunferências que passam por três pontos distintos da curva, P_0 , P_1 e P_2 quando estes se fazem coincidir. Os botões *aproximar* e *afastar* fazem coincidir ou afastar os três pontos.

5.2 Elipse: evoluta e paralelas

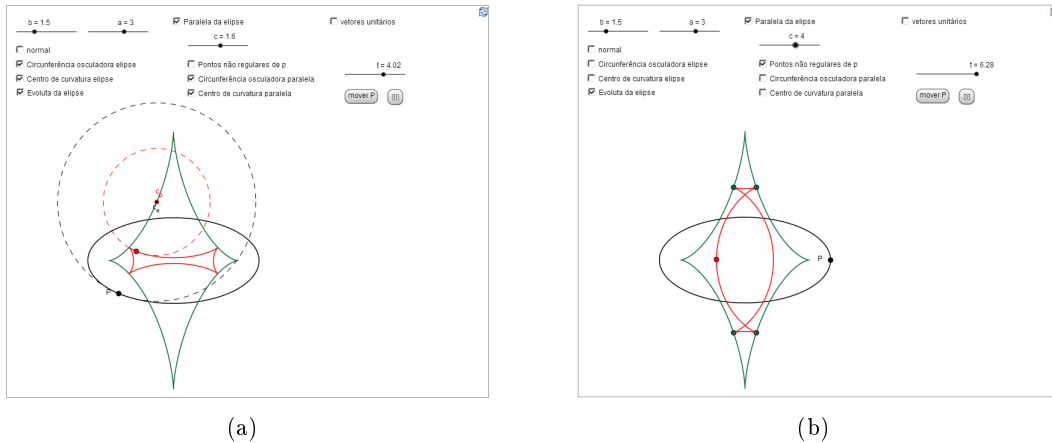


Figura 5.2: Instantâneos de *Elipse: evoluta e paralelas*

A elipse está definida por $e(t) = (a \cos t, b \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi[$. Os seletores a e b permitem escolher os parâmetros a e b . Cada paralela à elipse está definida por $p(t) = e(t) + c\vec{n}$. Movendo o seletor c podem ser visualizadas diferentes paralelas. O seletor t permite movimentar o ponto P na elipse e simultaneamente o ponto correspondente na paralela. Ao usar as caixas de mostrar/ocultar objetos, podem ser visualizadas as

circunferências osculadoras, os centros de curvatura, a evoluta e os vetores unitários tangentes e normais da elipse e da sua paralela nos pontos assinalados, sendo possível verificar que para cada valor de t , a elipse e a sua paralela têm a mesma normal, o mesmo centro de curvatura e os vetores unitários tangentes e normais são paralelos com o mesmo sentido ou sentidos contrários consoante $1 - ck$ é maior ou menor do que zero.

Fazendo variar t pode visualizar-se a evoluta da elipse como o lugar geométrico dos centros de curvatura e verificar que as paralelas da elipse têm a mesma evoluta em valores de t para os quais são regulares. Fazendo variar c , pode também visualizar-se a evoluta da elipse como o lugar geométrico dos pontos não regulares das suas paralelas.

5.3 Involutas de uma circunferência

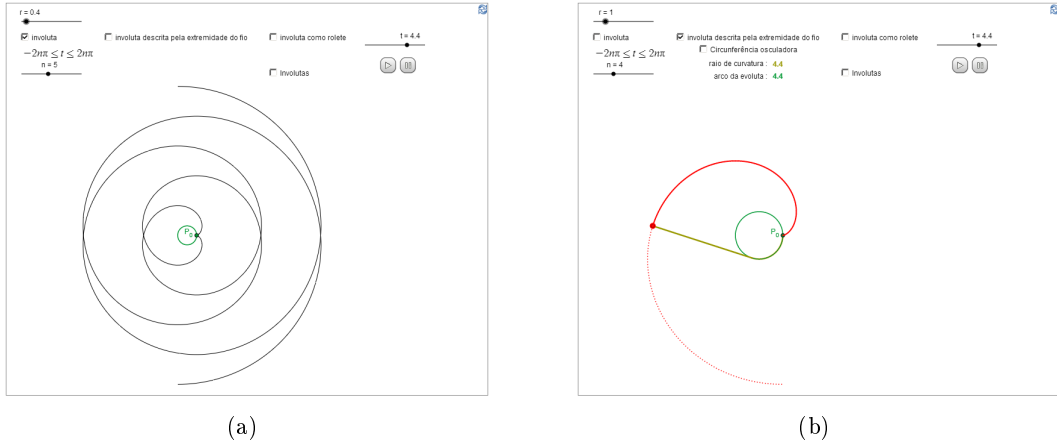


Figura 5.3: Instantâneos de *Involutas de uma circunferência*

Partindo de uma circunferência definida por $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ e o ponto $P_0 = \alpha(0)$ esta animação permite visualizar

- uma involuta da circunferência a começar em P_0 definida por

$$(r \cos t + rt \sin t, r \sin t - rt \cos t)$$

com $t \in [-2n\pi, 2n\pi]$ onde n é um número natural que pode ser alterado com o seletor n .

- a construção de uma involuta da circunferência desenrolando um fio com comprimento igual ao perímetro da circunferência, selecionando a caixa *involuta descrita pela extremidade do fio* e carregando no botão animar.
- uma involuta da circunferência como a *roulette* traçada por um ponto fixo de uma reta que rola sem deslizar sobre a circunferência, selecionando a caixa *involuta como roulette* e carregando no botão animar. O ponto da reta que traça a involuta pode ser escolhido com o seletor *mover ponto*.

5.4 Cicloides

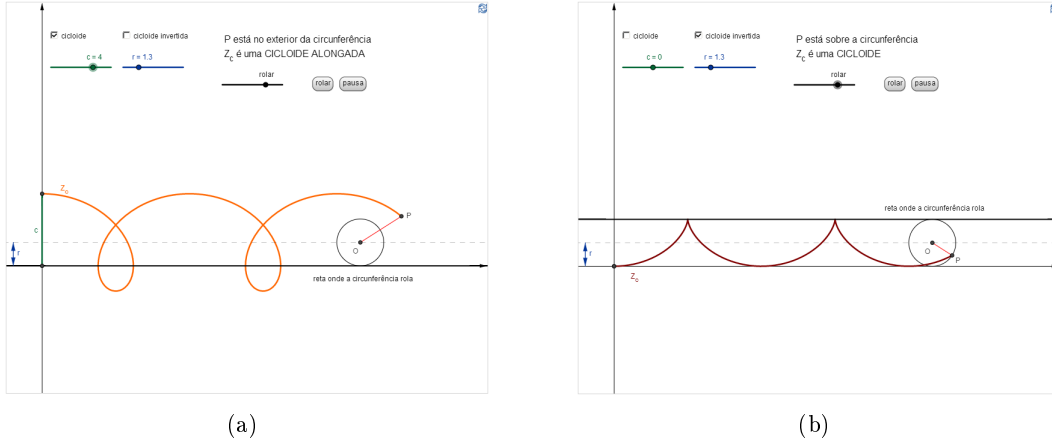


Figura 5.4: Instantâneos de *Cicloides*

A circunferência móvel de raio r rola sobre o eixo Ox , selecionando a caixa *cicloide* ou sob a reta $y = 2r$ selecionando a caixa *cicloide invertida*. A origem do referencial é o ponto de contacto da circunferência com Ox . No instante inicial o ponto P , gerador da cicloide, está sobre o eixo Oy . Nesse instante a sua ordenada é representada por c . Utilizando o seletor c , o ponto P pode ser posicionado sobre a circunferência, no seu exterior ou no seu interior, o que faz alterar a forma da cicloide, obtendo-se respetivamente uma cicloide, uma cicloide alongada ou uma cicloide encurtada.

5.5 Trocoides

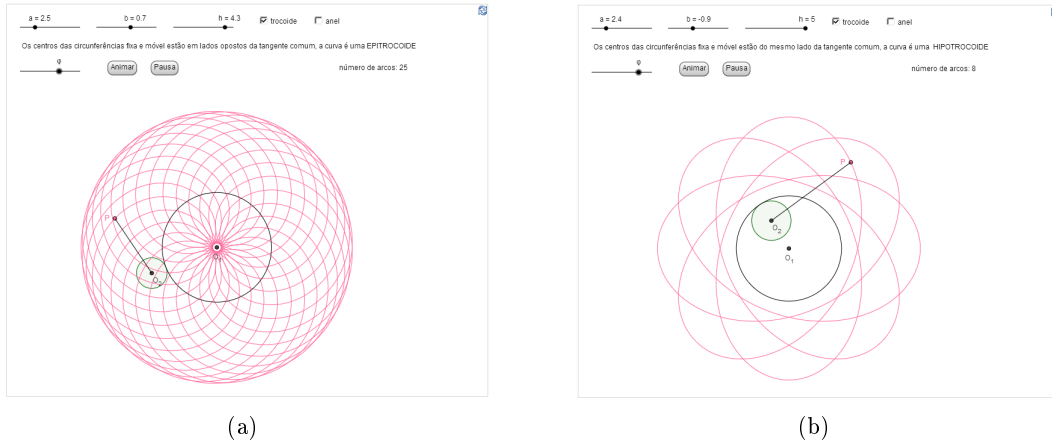


Figura 5.5: Instantâneos de *Trocoides*

A trocoide é a curva gerada pelo ponto P ligado rigidamente à circunferência móvel de raio $|b|$ quando esta rola sobre a circunferência fixa de raio a . Em \mathbb{C} é definida por $Z(\varphi) = (a + b)e^{i\varphi} - hbe^{i\varphi}(\frac{a+b}{b})$ com $a > 0$, $h \geq 0$ e $b \neq 0$, onde h representa a distância de P ao centro da circunferência móvel. Pode ser visualizada ou não selecionando a

caixa *trocoide*. A sua forma depende dos parâmetros a , b e h que podem ser modificados pelos seletores correspondentes. Consoante $b < 0$ ou $b > 0$ a curva é uma hipotrocoide ou epitrocoide. Em qualquer caso a curva é fechada e limitada por duas circunferências que podem ser visualizadas selecionando a caixa *anel*. Cada vez que a circunferência móvel faz uma rotação completa o ponto P gera um arco da trocoide. O número de arcos que é visualizado corresponde ao número de rotações da circunferência móvel até a curva fechar. O botão *animar* faz rolar a circunferência móvel e permite ver o ponto P a percorrer a trocoide.

5.6 Dupla geração da epitrocoide



Figura 5.6: Instantâneos de *Dupla geração da epitrocoide*

Esta animação permite visualizar uma epitrocoide a ser gerada como uma hipotrocoide. A epitrocoide é gerada pelo ponto P rigidamente ligado à circunferência móvel de raio b quando esta rola sobre uma circunferência fixa de raio a . Os seletores a e b permitem alterar os raios das duas circunferências e o seletor h faz variar a distância do ponto P ao centro da circunferência móvel. A epitrocoide é gerada com o seletor *gerar* ou o botão *animar*. Selecionando a caixa *circunferências geradoras da hipotrocoide* visualiza-se o par de circunferências fixa e móvel que fazem com que o ponto P gere a hipotrocoide coincidente com a epitrocoide. Ao animar verifica-se que a circunferência móvel rola no exterior da fixa que das duas é a que tem menor raio. Ao visualizar os dois pares de circunferências com animação pode constatar-se rapidamente que as circunferências móveis rolam no mesmo sentido. As caixas *epitrocoide* e *hipotrocoide* mostram ou ocultam a curva correspondente permitindo visualizar cada uma separadamente ou as duas em simultâneo.

5.7 Dupla geração da hipotrocoide

Esta animação permite visualizar como o mesmo ponto e dois pares de circunferências diferentes geram a mesma hipotrocoide. A hipotrocoide h_1 é gerada pelo ponto

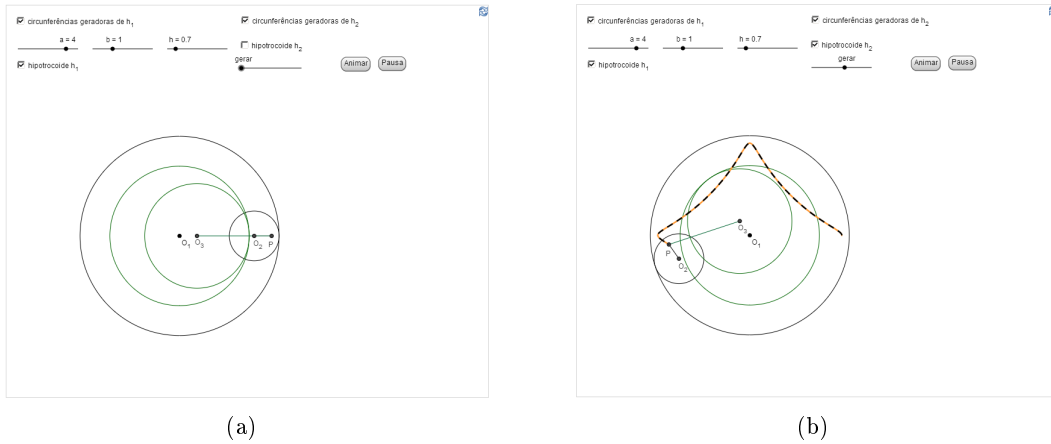


Figura 5.7: Instantâneos de *Dupla geração da hipotrocoide*

P rigidamente ligado à circunferência móvel de raio b quando esta rola sobre uma circunferência fixa de raio a . Os seletores a e b permitem alterar os raios das duas circunferências e o seletor h faz variar a distância do ponto P ao centro da circunferência móvel. A hipotrocoide é gerada com o seletor *gerar* ou o botão *animar*. Selecionando a caixa *circunferências geradoras de h_2* visualiza-se o par de circunferências fixa e móvel que fazem com que o ponto P gere a hipotrocoide h_2 coincidente com a hipotrocoide h_1 . Ao animar verifica-se que a circunferência móvel rola no interior da fixa que das duas é a que tem maior raio. Ao visualizar os dois pares de circunferências com animação pode constatar-se rapidamente que as circunferências móveis rolam em sentido contrário. As caixas *hipotrocoide h_1* e *hipotrocoide h_2* mostram ou ocultam a curva correspondente permitindo visualizar cada uma separadamente ou as duas em simultâneo.

5.8 Pêndulo isócrono

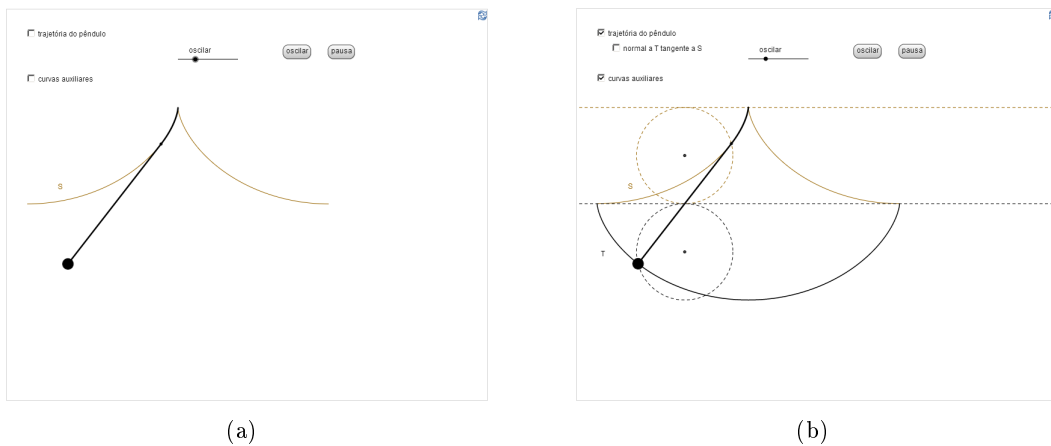


Figura 5.8: Instantâneos de *Pêndulo isócrono*

O pêndulo isócrono é constituído por uma massa presa na extremidade de um fio suspenso entre duas placas com a forma de uma cicloide invertida. Ao oscilar o fio

enrola e desenrola nos suportes fazendo com que a massa descreva uma involuta da cicloide que é outra cicloide invertida congruente com a primeira. A caixa *trajetória do pêndulo* permite mostrar ou ocultar a trajetória T . Com a caixa *normal a T tangente a S* pode-se visualizar a normal a T no ponto onde a massa se encontra e verificar que a normal a T nesse ponto é a tangente à cicloide do suporte S no ponto onde termina a parte desenrolada do fio. A caixa *curvas auxiliares* permite visualizar ou ocultar as circunferências e as retas que geram as duas cicloides. Verifica-se que as circunferências são iguais e o comprimento do fio é igual a dois diâmetros. Faz-se oscilar o pêndulo com o seletor ou com o botão *oscilar*.

5.9 Propriedade tautócrona da cicloide

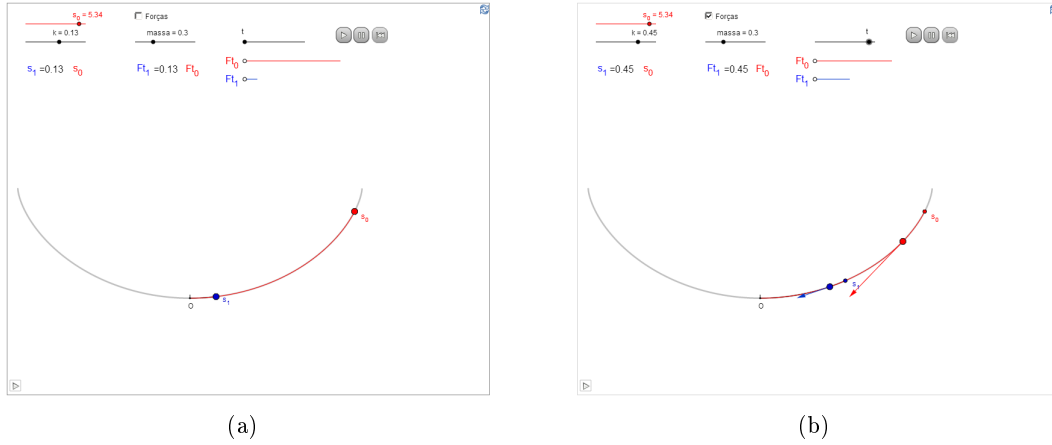


Figura 5.9: Instantâneos de *Propriedade tautócrona da cicloide*

Esta animação ilustra a propriedade tautócrona da cicloide e a sua explicação física. Duas contas com a mesma massa partindo do repouso em posições diferentes escorregam sem atrito ao longo de um arame com a forma de cicloide. Pode verificar-se que chegam ao ponto mais baixo O em simultâneo. Cada conta efetua um movimento harmónico simples oscilando entre duas posições simétricas da cicloide. As forças tangenciais Ft_0 e Ft_1 que atuam em cada conta são diretamente proporcionais aos comprimentos dos arcos da cicloide s_0 e s_1 compreendidos entre a conta e o ponto O . O seletor s_0 define a posição inicial de uma das contas colocando-a na extremidade do arco de comprimento s_0 . O seletor k define a posição da outra conta colocando-a na extremidade do arco de comprimento $k s_0$ (O número k está definido de forma que a conta possa ocupar qualquer ponto do arame). Pode ver-se que a razão das intensidades das forças tangenciais, que podem ser visualizadas selecionando a caixa *forças*, em qualquer instante é igual à razão dos comprimentos dos arcos s_0 e s_1 . O seletor *massa* permite redimensionar os vetores das forças tangenciais. Os três botões fazem, pela ordem em que aparecem, iniciar a animação, colocar em pausa e restaurar as posições das contas para as suas posições iniciais. O movimento das contas também pode ser visualizado com o seletor t .

5.10 Par conjugado: epicicloide e hipocicloide

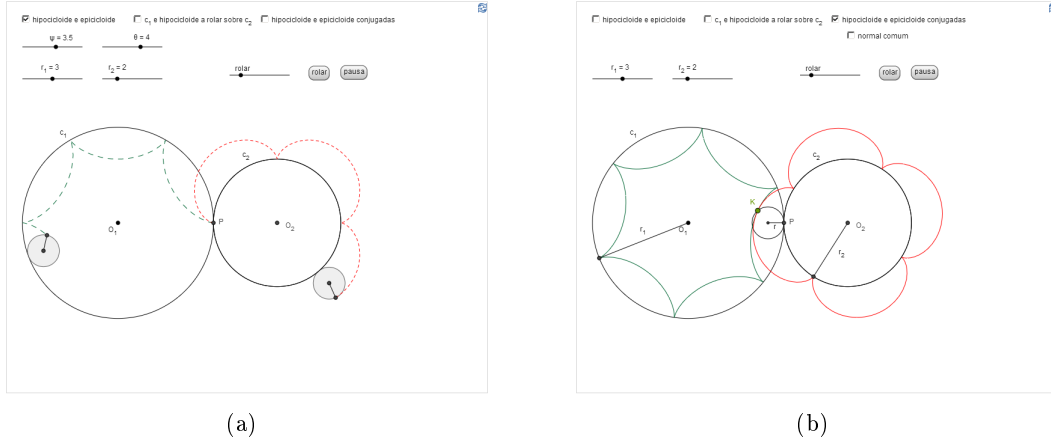


Figura 5.10: Instantâneos de *Par conjugado: epicicloide e hipocicloide*

Esta animação mostra como construir uma hipocicloide e uma epicicloide conjugadas. Consideram-se duas circunferências c_1 e c_2 tangentes em P , e uma circunferência auxiliar no interior de c_1 tangente às duas primeiras no mesmo ponto. O ponto P descreve uma hipocicloide ou uma epicicloide consoante a circunferência auxiliar rola no interior de c_1 ou no exterior de c_2 . Se c_1 rolar sobre c_2 a epicicloide é a envolvente das posições sucessivas da hipocicloide. Se as circunferências c_1 e c_2 rodarem simultaneamente mantendo fixa a auxiliar a hipocicloide e a epicicloide têm um ponto comum K que percorre a circunferência auxiliar. As duas curvas são tangentes nesse ponto e a normal comum passa no ponto P e portanto são curvas conjugadas. Os raios das circunferências primitivas podem ser alterados com os seletores r_1 e r_2 . Selecionando a caixa *hipocicloide e epicicloide* e movendo os seletores ψ e θ visualizam-se a hipocicloide e epicicloide a serem geradas pelo ponto P . Ao selecionar a caixa *c_1 com hipocicloide a rolar sobre c_2* e usando o seletor ou o botão *rolar* visualiza-se a epicicloide como envolvente das sucessivas posições da hipocicloide. Selecionando a caixa *hipocicloide e epicicloide conjugadas* e usando o seletor ou o botão *rolar* visualizam-se as duas circunferências primitivas a rodar simultaneamente e a circunferência auxiliar que está fixa é percorrida pelo ponto de contacto K das duas trocoides. Pode ainda, selecionando a caixa *normal comum*, verificar-se que a normal comum às duas curvas no ponto K passa no ponto primitivo P .

5.11 Perfil cicloidal: engrenamento

Esta animação mostra um par de dentes com perfil cicloidal em ação conjugada. As caixas *perfil 1* e *perfil 2* permitem visualizar o perfil de cada um dos dentes. Cada perfil é constituído por um arco de uma hipocicloide e outro de uma epicicloide. Para cada perfil é possível visualizar as duas curvas na totalidade selecionando as caixas respetivas. A caixa a_1 permite visualizar a circunferência que gera a hipocicloide H_1 e

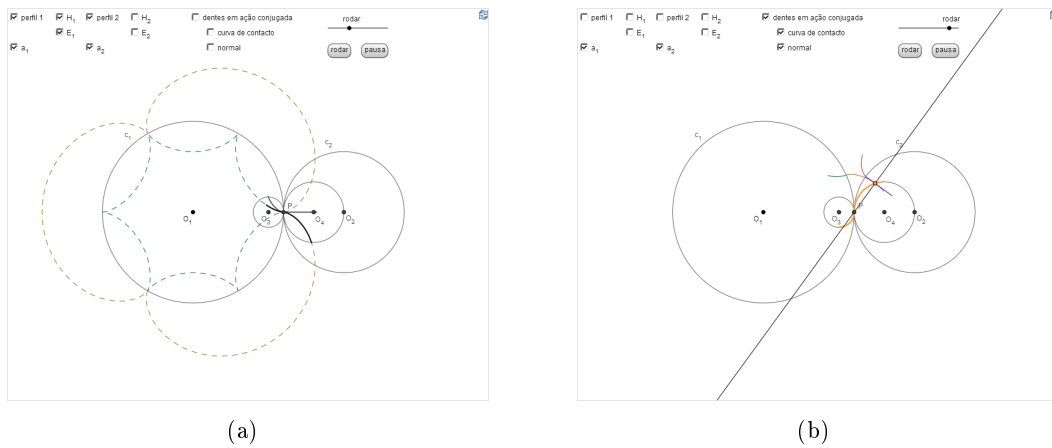


Figura 5.11: Instantâneos de *Perfil cicloidal: engrenamento*

a epicicloide E_2 e a caixa a_2 permite visualizar a circunferência que gera a hipocicloide H_2 e a epicicloide E_1 . Selecionando a caixa *dentes em ação conjugada* e com o seletor ou o botão *rodar* pode ver-se o engrenamento dos dois dentes. A caixa *curva de contacto* permite ver ou ocultar a trajetória do ponto de contacto dos dois dentes constituída por dois arcos das circunferências a_1 e a_2 . A caixa *normal* permite ver ou ocultar a normal comum aos dois perfis no ponto de contacto.

Referências Bibliográficas

- [1] Fouret,M., *Sur la double génération des épicycloïdes planes*, Nouvelles annales de mathématiques, Sér. 2, 8 (1869), p. 162-168 (http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869__2_8__162_1).
- [2] Ghys,E., Tabachnikov, S., Timorin, V., *Osculating curves: around the Tait-Kneser Theorem*, 2012 (<http://arxiv.org/pdf/1207.5662.pdf>).
- [3] Gibson,C.G.,*Elementary Geometry of Differentiable Curves: an undergraduate introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [4] La Hire,PH.,*Un traité des épicycloïdes et de leur usage dans les mécaniques*, Mémoires de mathématiques et de physique, Paris, 1694.
- [5] Nicolet,G.R., *Conception et calcul des éléments de machines*, Volume 3, École d'ingénieurs de Fribourg, 2006 (http://www.raymondnicolet.ch/volume3/Volume_3.pdf).
- [6] Norton,Robert L. *Cinemática e dinâmica dos mecanismos*, McGrawHill, Brasil, 2011.
- [7] Pressley,A.,*Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, London, 2001.
- [8] Rutter,John W.,*Geometry of curves*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [9] Teixeira,F.G., *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, Tome II*, Éditions Jacques Gabay, 1995.
- [10] Joella G.,*Unrolling Time, Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [11] Zwikker,C., *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*, Dover Publications,Inc., New York, 2005.